

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Е.А. Ефимов, Л.В. Коломиец

# Спектральное представление функций (сигналов)

*Учебное пособие*

САМАРА 2006

УДК 517.2 (075)

*Ефимов Е.А., Коломиец Л.В.* **Спектральное представление функций (сигналов)** : Учебное пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2006. 36с.

Учебное пособие представляет полное методическое обеспечение раздела курсовой работы «Спектральное представление функций (сигналов)». Учебное пособие включает варианты индивидуальных заданий и пример выполнения задания.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса радиотехнического факультета СГАУ.

Подготовлены на кафедре высшей математики .

Табл. 2. Ил. 16. Библиогр.: 4 назв.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензент: докт.техн.наук, проф. Л.М. Логвинов

© Е.А. Ефимов, Л.В. Коломиец, 2006

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2006

## Содержание

Спектральное представление функций (сигналов) .....	1
Введение .....	4
1. Задание к курсовой работе .....	6
1.1. ЧАСТЬ 1. Периодический сигнал .....	6
1.2. ЧАСТЬ 2. Четная непериодическая функция .....	7
1.3. ЧАСТЬ 3. Произвольный непериодический сигнал .....	7
2. Пример решения задачи. (Часть 1) .....	8
3. Пример решения задачи. (Часть 2) .....	21
4. Пример решения задачи. (Часть 3) .....	27
Список литературы .....	30
Приложение 1 .....	31
Приложение 2 .....	31
Варианты индивидуальных заданий .....	33

# ВВЕДЕНИЕ

*Математической моделью* радиотехнического сигнала может служить некоторая функция времени  $f(t)$ . Эта функция может быть вещественной или комплексной, одномерной или многомерной, детерминированной или случайной (сигналы с помехами). В радиотехнике одна и та же математическая модель с равным успехом описывает ток, напряжение, напряженность электрического поля и т.п.

В курсовой работе по математике рассматриваются вещественные одномерные детерминированные сигналы.

Множества функций (сигналов) принято рассматривать как линейные функциональные нормированные пространства, в которых введены следующие понятия и аксиомы:

- выполнены все аксиомы линейного пространства;
- скалярное произведение двух действительных сигналов определяется следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt; \quad (1)$$

- два сигнала называются *ортогональными*, если их скалярное произведение (1) равно нулю;
- система ортогональных сигналов образует бесконечномерный *координатный базис*, по которому можно разложить любой периодический сигнал, принадлежащий линейному пространству;
- *нормой* действительного сигнала  $f(t)$  называется

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

Квадрат нормы называется *энергией* сигнала  $E_f = \|f\|^2$ .

Среди разнообразных систем ортогональных функций, по которым можно разложить сигнал, наиболее распространенной является *система гармонических* (синусоидальных и косинусоидальных) функций:

$$1, \cos \frac{\pi x}{\ell}, \sin \frac{\pi x}{\ell}, \cos \frac{2\pi x}{\ell}, \sin \frac{2\pi x}{\ell}, \cos \frac{3\pi x}{\ell}, \sin \frac{3\pi x}{\ell}, \dots \quad (2)$$

Представление некоторого периодического сигнала в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами (2) называется

*спектральным представлением* сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его *спектр*. С математической точки зрения спектральное представление эквивалентно разложению периодической функции (сигнала) в ряд Фурье.

Значение спектрального разложения функций в радиотехнике обусловлено рядом причин:

- простота изучения свойств произвольного сигнала, т.к. гармонические функции хорошо изучены;
- возможность генерирования произвольного сигнала, т.к. техника генерирования гармонических сигналов достаточно проста;
- простота передачи и приема сигнала по радиоканалу, т.к. гармоническое колебание является единственной функцией времени, сохраняющей свою форму при прохождении через любую линейную цепь. Сигнал на выходе цепи остается гармоническим с той же частотой, изменяется лишь амплитуда и начальная фаза колебания;
- разложение сигнала по синусам и косинусам позволяет использовать символический метод, разработанный для анализа передачи гармонических колебаний через линейные цепи.

**В курсовой работе требуется определить спектральные представления некоторых периодических и непериодических сигналов.**

# 1. ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

## ЧАСТЬ 1. Спектральное представление и спектральные характеристики периодического сигнала

- 1.1. Дана кусочно-линейная функция  $f_0(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in [-\ell; 0) \\ cx + d, & x \in [0; \ell) \end{cases}$  (значения коэффициентов см. в таблице на с. 33), являющаяся математической моделью некоторого сигнала.
- 1.2. Продолжите эту функцию **периодически** на всю числовую ось, постройте график полученной периодической функции  $f(x)$  и проверьте выполнение условий Дирихле.
- 1.3. Постройте график функции  $S(x)$  — суммы ряда Фурье.
- 1.4. Запишите **ряд Фурье** для полученной кусочно-линейной периодической функции в действительной и комплексной форме.
- 1.5. Запишите частичные суммы ряда Фурье  $S_0(x), S_1(x), S_2(x), S_3(x)$  и постройте их графики на одном чертеже с графиком  $f(x)$ .
- 1.6. Постройте **амплитудную и фазовую диаграммы** кусочно-линейной периодической функции (для  $n = 1, 2, \dots, 8$ ).
- 1.7. Запишите **равенство Парсеваля** и проверьте его выполнение. Найдите среднюю мощность сигнала. Запишите математический смысл равенства Парсеваля.
- 1.8. Продолжите функцию  $y_1(x) = cx + d, x \in [0; \ell)$  периодически на всю числовую ось **четным** образом, запишите ряд Фурье для полученной функции в действительной и комплексной форме, постройте график  $S(x)$  — суммы ряда, постройте амплитудную и фазовую диаграммы четной функции.
- 1.9. Продолжите функцию  $y_1(x) = cx + d, x \in [0; \ell)$  периодически на всю числовую ось **нечетным** образом, запишите ряд Фурье для полученной функции в действительной и комплексной форме, постройте график  $S(x)$  — суммы ряда, постройте амплитудную и фазовую диаграммы нечетной функции.
- 1.10. Сравните полученные в пп. 3, 8, 9 аппроксимации для функции  $y_1(x) = cx + d, x \in [0; \ell)$  и сделайте выводы.

## ЧАСТЬ 2. Спектральное представление и спектральные характеристики четной непериодической функции

2.1. Дан прямоугольный импульс  $g_1(t) = \begin{cases} \ell, & t \in [-\ell; \ell] \\ 0, & t \in (-2\ell; \ell) \cup (\ell; 2\ell). \end{cases}$

Для сравнения спектральных характеристик периодического и непериодического сигналов продолжите сначала этот импульс **периодически** на всю числовую ось, запишите ряд Фурье для четного периодического импульса в комплексной форме, постройте спектральную диаграмму коэффициентов  $C_n$ .

2.2. Запишите преобразование Фурье для четного прямоугольного импульса  $g(t) = \begin{cases} \ell, & t \in [-\ell; \ell] \\ 0, & t \notin [-\ell; \ell]. \end{cases}$  Запишите формулу для **спектральной плотности** и постройте ее график в частотной области. **Сравните** график спектральной плотности непериодического импульса с огибающей спектральной диаграммы периодического импульса. Запишите, как выглядит график спектральной плотности **четного** сигнала.

2.3. Запишите, как изменяется спектральная плотность при **увеличении амплитуды** импульса  $g(t)$  в  $|a|$  раз, постройте графики нового импульса  $g_2(t)$  и его спектральной плотности.

2.4. Запишите, как изменяется спектральная плотность при **увеличении длительности** импульса  $g_2(t)$  в  $|b|$  раз, постройте графики нового импульса  $g_3(t)$  и его спектральной плотности.

2.5. Запишите, как изменяется спектральная плотность при **сдвиге** импульса  $g_3(t)$  на  $|c|$  секунд по оси времени, постройте графики нового импульса  $g_4(t)$  и модуля его спектральной плотности.

## ЧАСТЬ 3. Спектральное представление и спектральные характеристики произвольного непериодического сигнала

3.1. Найдите **спектральную плотность** сигнала  $q(t) = \begin{cases} e^{dt}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$  (если  $d < 0$ ) или  $q(t) = \begin{cases} e^{dt}, & t \leq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$  (если  $d > 0$ ). Постройте графики **амплитудного и фазового** спектров сигнала. Запишите **равенство Парсеваля** и проверьте его выполнение. Запишите энергетический смысл этого равенства.

# ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ СИГНАЛ (ЧАСТЬ 1)

1.1. Пусть задана кусочно-линейная функция

$$f_0(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in [-3; 0); \\ x - 2, & x \in [0; 3), \end{cases} \quad (3)$$

являющаяся математической моделью некоторого сигнала.

1.2. Продолжим эту функцию периодически на всю числовую ось, получим периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T = 2\ell = 6$ , график которой изображен на рис. 1.

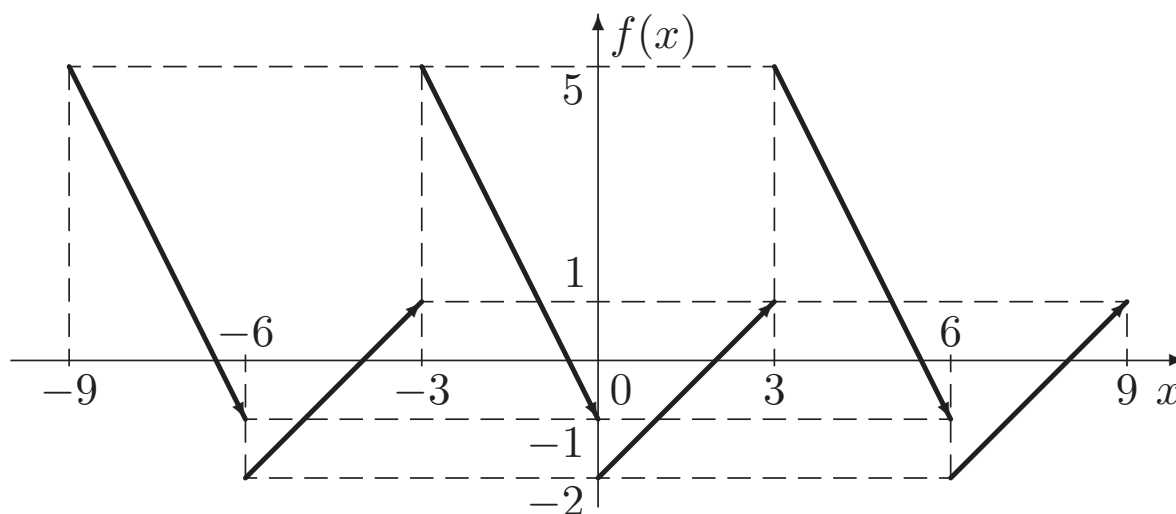


Рис. 1. График периодически продолженной функции

Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле:

- 1)  $f(x)$  непрерывна на главном периоде  $[-3; 3]$ , за исключением конечного числа точек разрыва первого рода;
- 2) производная  $f'(x)$  имеет на отрезке  $[-3; 3]$  конечное число точек разрыва первого рода.

Выполнение этих условий означает, что функция является на отрезке  $[-3; 3]$  *кусочно-гладкой*. Ряд Фурье кусочно-гладкой функции сходится к значению  $f(x)$  в каждой точке непрерывности функции и к значению  $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$  в каждой точке разрыва.

1.3. График суммы ряда Фурье приведен на рис. 2. В точках непрерывности функции график суммы ряда полностью совпадает с графиком функции. В точках разрыва первого рода значения суммы ряда отличаются от значений заданной функции и равны среднему арифметическому левого и правого пределов функции в этой точке.



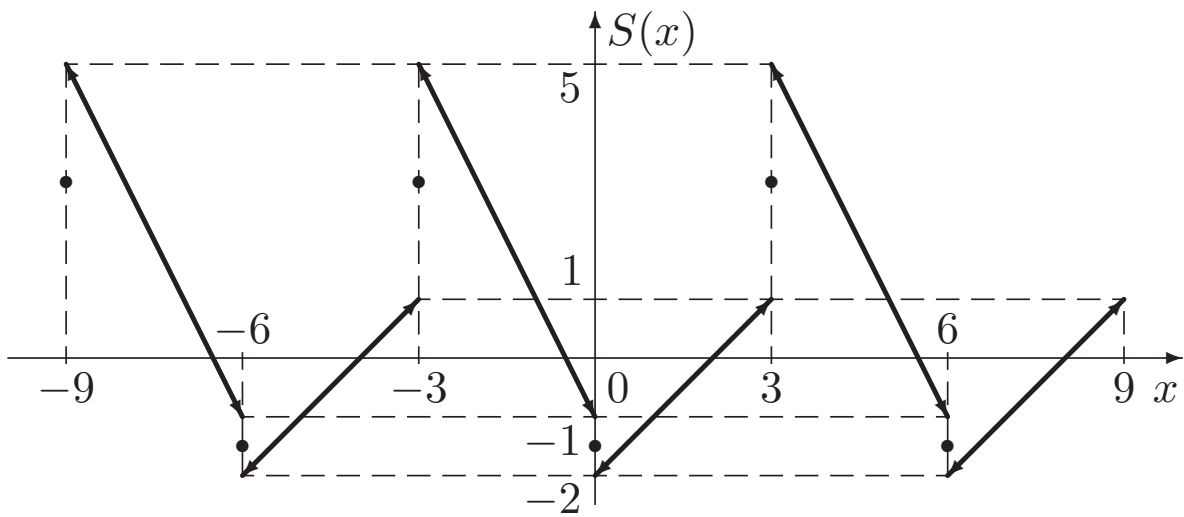


Рис. 2. График суммы ряда Фурье периодической функции

**1.4.** Для функции  $f(x)$ , периодической с периодом  $T = 2\ell$  и удовлетворяющей на отрезке  $[-\ell; \ell]$  условиям Дирихле, можно записать ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (4)$$

Здесь

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (6)$$

Соотношение (4) означает, что функции  $f(x)$  соответствует ряд Фурье, записанный справа. Согласно теореме Дирихле, равенство левой и правой частей в (4) выполняется в отдельных точках. Из этого, однако, еще не следует равенство функций, т.е. что ряд в правой части (4) сходится, причем именно к  $f(x)$ . Действительно, если значения двух функций отличаются только в конечном числе точек, то интегралы (5), (6), определяющие их коэффициенты Фурье, будут одинаковыми. Такие функции имеют один и тот же ряд Фурье.

Вычислим по формулам (5), (6) коэффициенты ряда Фурье заданной функции:

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 (-2x - 1) dx + \int_0^3 (x - 2) dx \right] = \frac{3}{2}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{\pi n x}{3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 (-2x - 1) \cos \frac{\pi n x}{3} dx + \int_0^3 (x - 2) \cos \frac{\pi n x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{9}{(\pi n)^2} (\cos \pi n - 1) = \frac{9}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1); \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \frac{1}{\pi n} (4 \cos \pi n - 1) = \frac{1}{\pi n} (4(-1)^n - 1). \quad (9)$$

По формуле (4) запишем искомый ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{9((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{-1 + 4(-1)^n}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \right]. \quad (10)$$

Равенство в (10) имеет место во всех точках непрерывности функции  $f(x)$ . В точках разрыва значение суммы ряда равно:

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{1}{2} (f(0-0) + f(0+0)) = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2}; \\ S(-3) &= \frac{1}{2} (f(-3-0) + f(-3+0)) = \frac{1 + 5}{2} = 3 \\ S(3) &= \frac{1}{2} (f(3-0) + f(3+0)) = \frac{1 + 5}{2} = 3 \end{aligned} \quad (11)$$

Проверим выполнение условия (11) в точке  $x=0$ . Подставляя  $x=0$  в правую часть (10) и учитывая, что  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{\pi^2 (2k-1)^2} = \frac{3}{4} - \frac{18}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{18}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь использована известная сумма ряда (приложение 1).

Ряд Фурье (4) в общем случае можно записать в комплексной форме с комплексными коэффициентами. Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos \frac{\pi nx}{\ell} = \frac{e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} + e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi nx}{\ell} = \frac{e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} - e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}}}{2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} + e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} - e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}}}{2} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}} \end{aligned} \quad (14)$$

Если ввести обозначения

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (15)$$

ряд (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f(x) &\sim C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}} = \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{i\frac{\pi nx}{\ell}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{\pi nx}{\ell}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это и есть комплексная форма ряда Фурье с комплексными коэффициентами, определяемыми по формулам (15).

Коэффициенты комплексного ряда Фурье можно получить и непосредственно, вычисляя их по формуле

$$C_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{\pi nx}{\ell}} dx. \quad (17)$$

Непосредственное интегрирование по формуле (17) приводит к тем же выражениям для комплексных коэффициентов, что и формулы (15) (ПОЛУЧИТЬ эти коэффициенты интегрированием).

Запишем теперь в комплексной форме ряд Фурье заданной функ-

ции:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{\pi n x}{3}}, \quad \text{где } C_0 = \frac{3}{4},$$

$$C_n = \frac{9}{2(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) - \frac{i}{2n\pi} (4(-1)^n - 1), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

**1.5.** Запишем частичные суммы ряда (10):

$$S_0(x) = \frac{3}{4}; \quad S_1(x) = \frac{3}{4} - \frac{18}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{3} - \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi x}{3};$$

$$S_2(x) = \frac{3}{4} - \frac{18}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{3} - \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi x}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{3} = S_1(x) + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{3}$$

$$S_3(x) = S_2(x) - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{5}{3\pi} \sin \pi x. \quad (19)$$

Графики частичных сумм приведены на рис. 3.

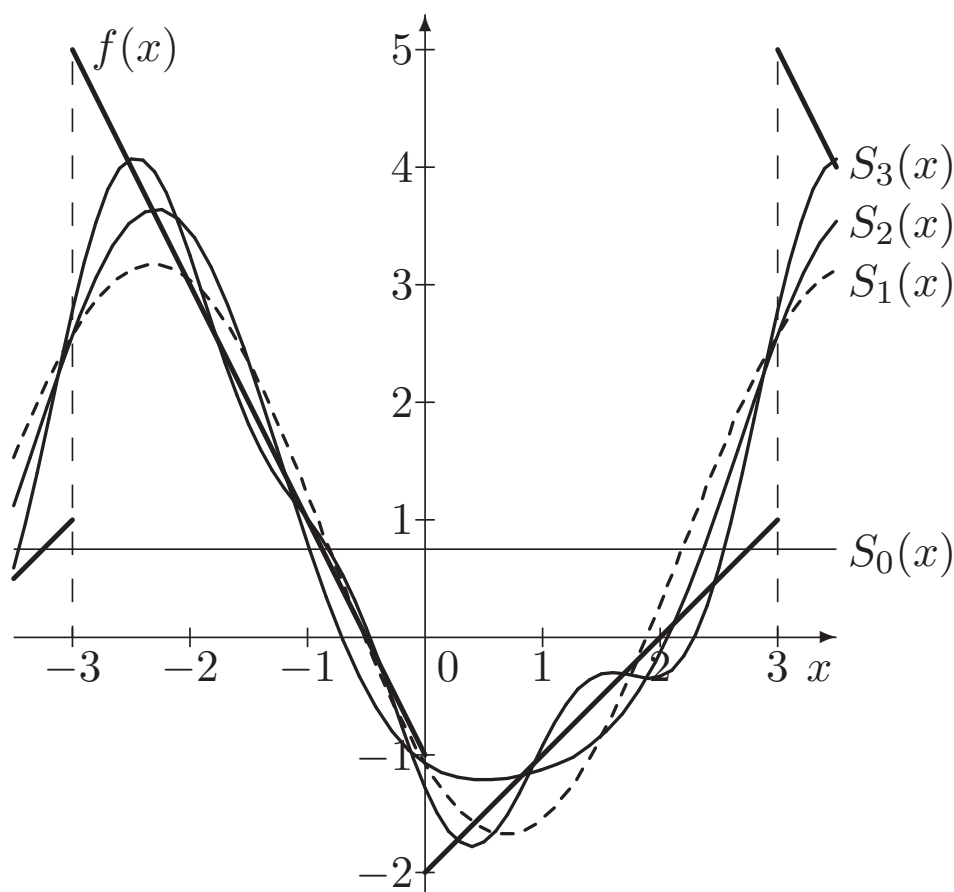


Рис. 3. Графики частичных сумм ряда Фурье

**Вывод:** с ростом  $n$  графики частичных сумм  $S_n(x)$  в точках непрерывности  $x \in (-3; 0) \cup (0; 3)$  приближаются к графику функ-

ции  $f(x)$ . В точках разрыва значения частичных сумм приближаются к  $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$ .

**1.6.** Выражение  $a_n \cos \frac{\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi nx}{\ell}$  в ряде Фурье называется  $n$ -й гармоникой. Известно, что

$$a_n \cos \frac{\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi nx}{\ell} = A_n \cos \left( \frac{\pi nx}{\ell} - \varphi_n \right), \quad (20)$$

где 
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{b_n}{A_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{a_n}{A_n} \quad (21)$$

или 
$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \text{ с учетом четверти.}$$

Совокупности  $\{A_n\}$  и  $\{\varphi_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , называются соответственно *амплитудным* и *фазовым спектром* периодической функции. Графически спектры изображаются в виде отрезков длины  $A_n$  или  $\varphi_n$ , проведенных перпендикулярно оси, на которую наносится значение  $n=1, 2, \dots$  или  $\omega_n = \frac{\pi n}{\ell}$ . Спектры имеют дискретный характер, причем расстояние между отдельными линиями спектра равно  $\frac{\pi}{\ell}$  для  $2\ell$ -периодической функции. Графическое изображение соответствующего спектра называется *амплитудной или фазовой диаграммой*.

Вычислим несколько первых значений амплитудного и фазового спектра:

$$a_1 = \frac{-18}{\pi^2}; \quad b_1 = \frac{-5}{\pi}; \quad A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \approx 2,42060; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1} - \pi \approx -2,4241.$$

Так как  $a_1 < 0$ ,  $b_1 < 0$ , то  $\varphi_1 \in \text{III}$  - четверти.

$$a_2 = 0; \quad b_2 = \frac{3}{2\pi}; \quad A_2 = \frac{3}{2\pi} \approx 0,47746; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708. \quad (22)$$

$$a_3 = \frac{-2}{\pi^2}; \quad b_3 = \frac{-5}{3\pi}; \quad A_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \approx 0,56789; \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{b_3}{a_3} - \pi \approx -1,9357.$$

Продолжим эти вычисления для  $n=4, 5, \dots, 8$  и занесем данные в таблицу. Откладывая на графиках вертикальные отрезки соответствующей длины, получим амплитудную и фазовую диаграммы данной функции. Диаграммы приведены на рис. 4 и 5.

$n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\varphi_n$
1	-1,8238	-1,59160	2,42060	-2,4241
2	0	0,47746	0,47746	1,5708
3	-0,20264	-0,53053	0,56789	-1,9357
4	0	0,23873	0,23873	1,5708
5	-0,07295	-0,31831	0,32656	-1,7961
6	0	0,15916	0,15916	1,5708
7	-0,03722	-0,22737	0,23039	-1,7331
8	0	0,11937	0,11937	1,5708

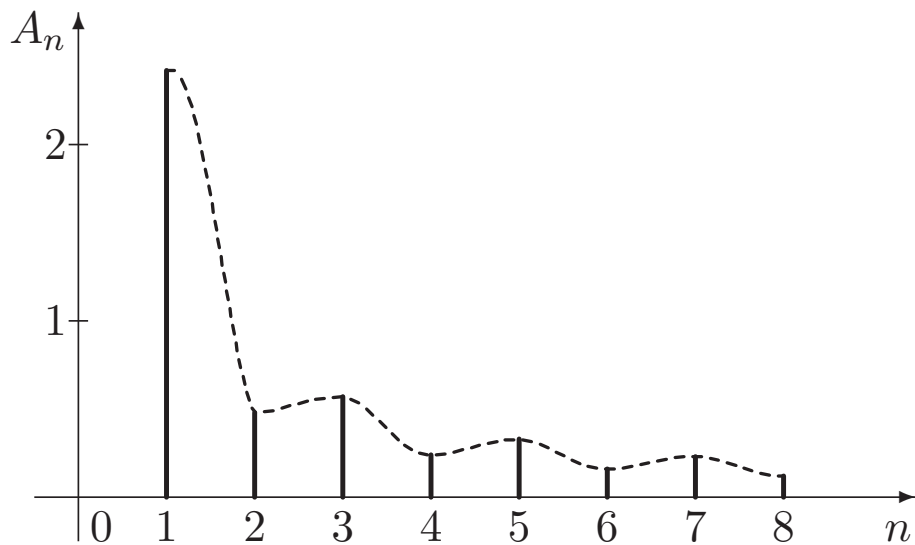


Рис. 4. Амплитудная диаграмма периодического сигнала

**Вывод:** с ростом  $n$  амплитудный спектр убывает (не монотонно).

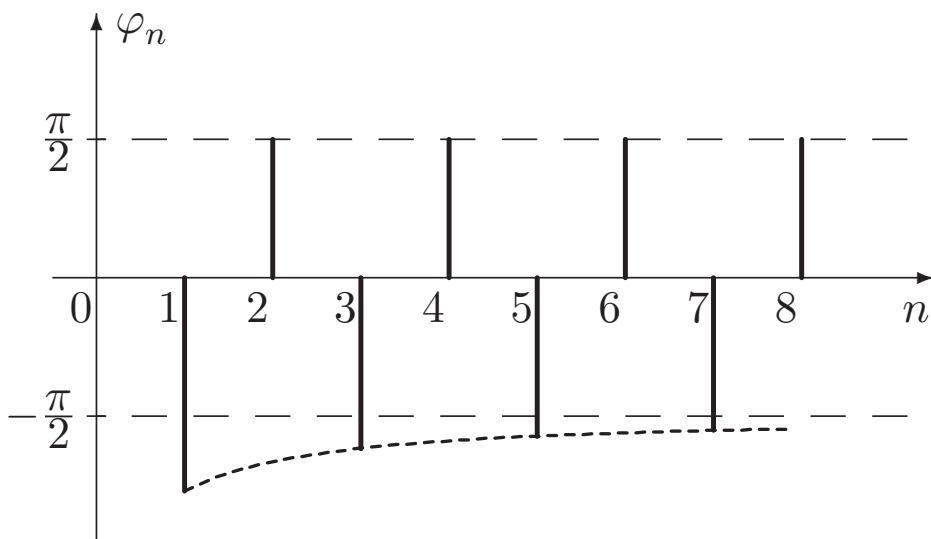


Рис. 5. Фазовая диаграмма периодического сигнала

**Вывод:** с ростом  $n$  фазовый спектр  $\varphi_{2k} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_{2k-1} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ .

**1.7.** Энергия периодического сигнала, длящегося от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$  бесконечно велика. При рассмотрении энергетических характеристик периодического сигнала основной интерес представляет *средняя мощность*, которая совпадает с мощностью, средней за один период  $T = 2\ell$ :

$$\overline{E}_f = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(t) dt. \quad (23)$$

Распределение этой мощности между отдельными гармониками основано на *равенстве Парсеваля*, справедливого для любой полной ортогональной системы базисных функций (в том числе и для системы гармонических функций). Равенство Парсеваля можно рассматривать как аналог формулы линейной алгебры, в которой квадрат нормы вектора равен сумме квадратов координат:

$$\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (24)$$

откуда 
$$\overline{E}_f = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (25)$$

Таким образом, смысл равенства Парсеваля состоит в следующем: *полная средняя мощность периодического сигнала равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельными гармониками.*

С физической точки зрения равенство Парсеваля означает, что для того, чтобы *найти с заданной точностью приближенное значение средней мощности, достаточно сложить квадраты амплитуд нескольких первых гармоник.* Так как амплитудный спектр убывает, гармоники с достаточно большими номерами не будут вносить существенного вклада в среднюю мощность.

Проверим выполнение равенства Парсеваля для заданной функции (3). Вычислим интеграл в левой части (24):

$$\frac{1}{3} \int_{-3}^3 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 (-2x - 1)^2 dx + \int_0^3 (x - 2)^2 dx \right] = 8. \quad (26)$$

Вычислим правую часть равенства (24). Для этого подсчитаем

квадраты коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} &= \frac{9}{8} = 1,125, \\ a_n^2 &= \frac{162}{\pi^4} \cdot \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n), \quad b_n^2 = \frac{1}{\pi^2 n^2} (17 - 8(-1)^n). \end{aligned} \quad (27)$$

Найдем сумму ряда в правой части (24):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{162}{\pi^4} \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{162}{\pi^4} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \frac{17}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) = \\ &= \frac{162}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{162}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \frac{17}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \\ &= \frac{162}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{90} + \frac{162}{\pi^4} \cdot \frac{7\pi^4}{720} + \frac{17}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{12} = 6,875 \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь использованы известные суммы некоторых рядов.

Окончательно получим

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 1,125 + 6,875 = 8. \quad (29)$$

Для ряда (10) равенство Парсеваля выполняется.

Согласно (25) и (26), средняя мощность сигнала

$$\overline{E}_f = 4. \quad (30)$$

Запишем математический смысл равенства Парсеваля.

Отметим, что тригонометрический ряд Фурье обладает важным свойством: *при фиксированном числе слагаемых ряда  $N$  он обеспечивает наилучшую аппроксимацию в смысле минимума среднеквадратической ошибки, т.е. среднеквадратическая ошибка*

$$M = \sqrt{\int_{-3}^3 \left( f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \cos \frac{\pi n x}{3} + b_n \sin \frac{\pi n x}{3} \right)^2 dx} \quad (31)$$

достигает минимума, когда коэффициенты ряда вычисляются по формулам (5), (6).

С математической точки зрения выполнение равенства Парсеваля означает, что ряд Фурье *сходится в среднем* к функции  $f(x)$ , т.е. что среднеквадратическая ошибка стремится к нулю и выполняется соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-3}^3 \left( f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \cos \frac{\pi n x}{3} + b_n \sin \frac{\pi n x}{3} \right)^2 dx = 0. \quad (32)$$



Из этого, однако, еще не следует, что ряд Фурье сходится к функции  $f(x)$  *равномерно*, т.е. что при достаточно больших  $N$  при всех значениях  $x$  из отрезка  $[-3; 3]$  модуль разности можно сделать сколь угодно малым:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \cos \frac{\pi n x}{3} + b_n \sin \frac{\pi n x}{3} \right| < \varepsilon. \quad (33)$$

В некоторых точках оси  $Ox$  эта разность может быть и велика, важно только, чтобы интеграл от ее квадрата по отрезку  $[-3; 3]$  был мал для больших  $N$ .

Итак, из сходимости в среднем ряда Фурье к функции  $f(x)$ , для которой он составлен, еще не следует, что суммой этого ряда является  $f(x)$ . В то же время, ряд Фурье, составленный для функции, *непрерывной* и кусочно-гладкой на всей числовой оси, сходится к этой функции *равномерно*. Такой ряд можно почленно дифференцировать, интегрировать, и его сумма равна функции.

**1.8.** Продолжим функцию  $y_1 = x - 2$ ,  $x \in [0; 3)$  периодически на всю числовую ось **четным** образом. Получим периодическую функцию  $f_1(x)$  с периодом  $T = 2\ell = 6$ , график которой приведен на рис. 6. Так как полученная периодическая функция  $f_1(x)$  непрерывна на всей числовой оси, ряд Фурье сходится *равномерно* к  $f_1(x)$ , и график суммы ряда  $S(x)$  полностью совпадает с графиком  $f_1(x)$ .

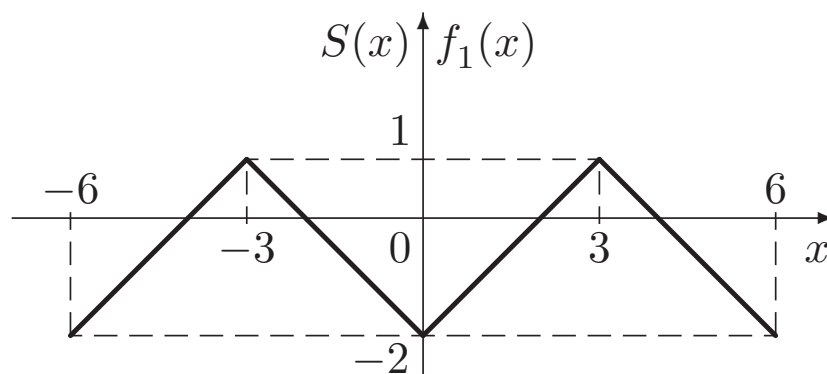


Рис. 6. График четной периодической функции и суммы ряда Фурье

Вычислим коэффициенты ряда Фурье этой четной функции. Все коэффициенты  $b_n = 0$  в силу нечетности подынтегральных функций  $f_1(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell}$ .

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f_1(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 (x-2) dx = -1 \\
a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f_1(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 (x-2) \cos \frac{\pi n x}{3} dx = \frac{6}{(\pi n)^2} (\cos \pi n - 1) = \\
&= \frac{6}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases} \quad (34)
\end{aligned}$$

Действительная форма ряда Фурье четной функции имеет вид

$$f_1(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos \frac{\pi (2k-1) x}{3}. \quad (35)$$

Ряд Фурье четной функции содержит только косинусоидальные гармоники.

Для проверки вычисления подставим в левую и правую части выражения (35) значение  $x = 0$ :  $f_1(0) = -2$ ;

$$S(0) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} = -\frac{1}{2} - \frac{12}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2. \quad (36)$$

Получили верное равенство:  $f_1(0) = S(0)$ . В остальных точках равенство  $f_1(x) = S(x)$  также выполняется.

Запишем комплексную форму ряда Фурье. Для четной функции  $f_1(x)$  все  $b_n = 0$ , следовательно, все коэффициенты комплексного ряда Фурье действительные числа:

$$C_0 = \frac{-1}{2}; \quad C_n = \frac{a_n}{2} = \frac{3}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (37)$$

Комплексная форма ряда Фурье четной функции  $f_1(x)$  имеет вид

$$f_1(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i \frac{\pi n x}{3}}. \quad (38)$$

Для четной функции принято считать  $\varphi_n = 0$  (так как  $b_n = 0$ ) и рассматривать амплитудный спектр коэффициентов  $a_n$ , которые откладываются на диаграмме с соответствующим знаком (рис. 7).

**Вывод:** амплитудный спектр убывает по модулю (не монотонно). В этом случае говорят, что огибающая огибающих амплитудного спектра стремится к нулю.

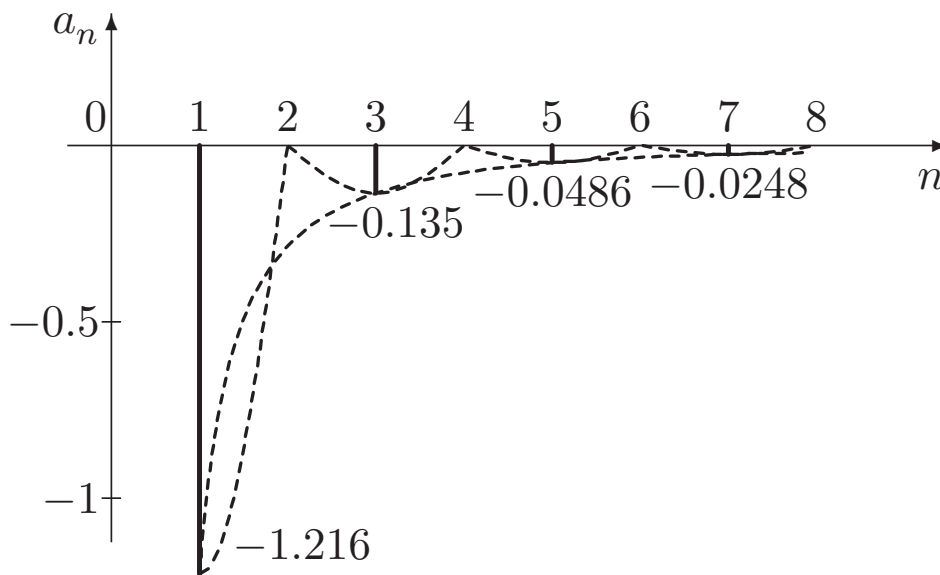


Рис. 7. График амплитудного спектра четной периодической функции

**1.9.** Продолжим функцию  $y_1 = x - 2$ ;  $x \in [0, 3)$  периодически на всю числовую ось **нечетным** образом. Получим периодическую функцию  $f_2(x)$  с периодом  $T = 2\ell = 6$ , график которой приведен на рис. 8. Нечетная периодическая функция  $f_2(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, для нее можно записать ряд Фурье. Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 (x - 2) \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \frac{-2}{\pi n} (2 + (-1)^n). \quad (39)$$

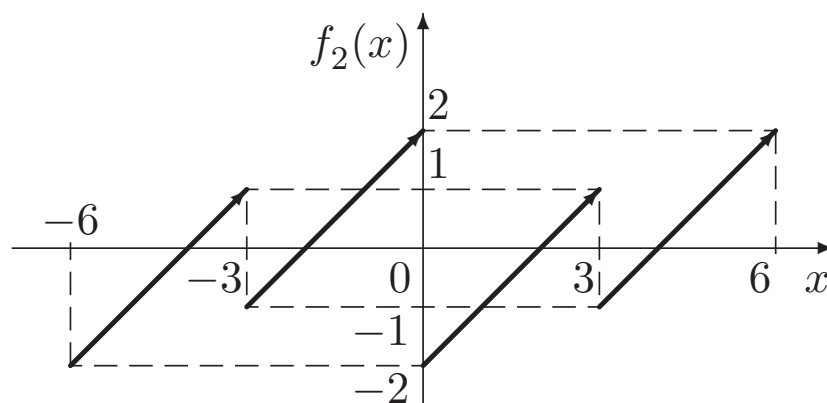


Рис. 8. График нечетной периодической функции

Коэффициенты  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$  в силу нечетности подынтегральных функций  $f_2(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell}$ . Действительная форма ряда Фурье

нечетной функции имеет вид

$$f_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi n} (2 + (-1)^n) \sin \frac{\pi n x}{3}. \quad (40)$$

Ряд Фурье нечетной функции содержит только синусоидальные гармоники.

Для проверки вычислений подставим в левую и правую части выражения (40) значение  $x = \frac{3}{2}$ :  $f_2\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ ;

$$S\left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi n} (2 + (-1)^n) \sin \frac{\pi n}{2}. \quad (41)$$

Учитывая, что

$$\sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{k+1}, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad (42)$$

выражение (41) переписывается в виде

$$\begin{aligned} S\left(\frac{3}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)} (2 + (-1)^{2k-1}) \cdot (-1)^{k+1} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

Получили верное равенство:  $f_2\left(\frac{3}{2}\right) = S\left(\frac{3}{2}\right)$ . Здесь использована известная сумма ряда. В остальных точках непрерывности функции равенство  $f_2(x) = S(x)$  также выполняется.

Для нечетной функции все  $a_n = 0$ , следовательно, коэффициенты комплексного ряда Фурье чисто мнимые числа:

$$C_0 = 0; \quad C_n = -i \frac{b_n}{2} = \frac{i}{\pi n} (2 + (-1)^n), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (44)$$

Комплексная форма ряда Фурье нечетной функции  $f_2(x)$  имеет вид

$$f_2(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i \frac{\pi n x}{3}}. \quad (45)$$

Для нечетной функции принято считать  $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$  (так как  $a_n = 0$ ) и рассматривать амплитудный спектр коэффициентов  $b_n$ , которые откладываются на диаграмме с соответствующим знаком (рис. 9).

**Вывод:** амплитудный спектр убывает по модулю (не монотонно). В этом случае говорят, что огибающая огибающих амплитудного спектра стремится к нулю.

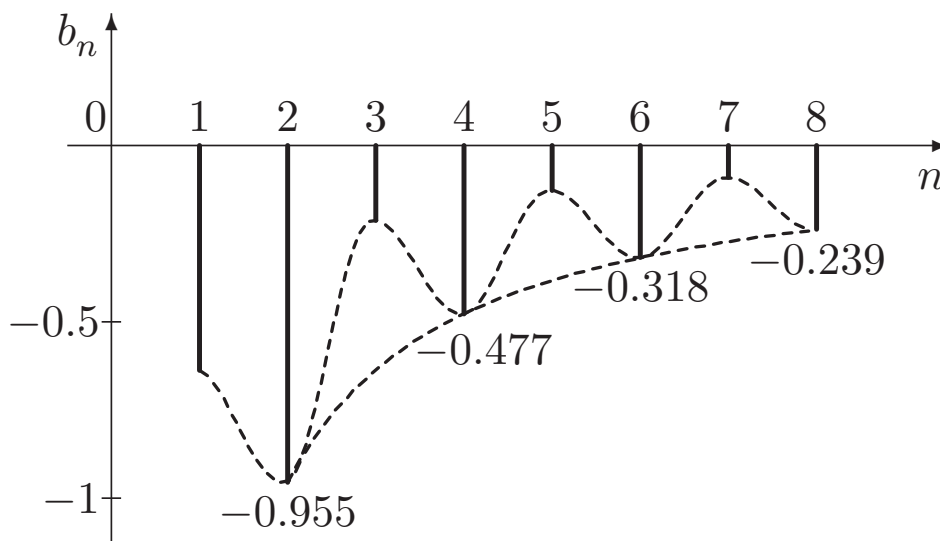


Рис. 9. График амплитудного спектра нечетной периодической функции

**1.10.** Из формул (10), (35) и (40), дающих разложение в ряд Фурье на отрезке  $[0; 3]$  одной и той же функции  $y = x - 2$ ,  $x \in [0; 3)$ , можно сделать следующий **вывод**:

вид ряда Фурье зависит от того, как была периодически продолжена функция на всю числовую ось. При четном продолжении ряд содержит только косинусы, при нечетном — синусы, произвольное продолжение содержит оба вида гармоник. Все три ряда, имея различные коэффициенты, в точках  $x \in (0; 3)$  сходятся к одним и тем же значениям. Однако четное продолжение более предпочтительно, т.к. ряд Фурье в этом случае сходится равномерно.

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ. НЕПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (ЧАСТЬ 2)

**2.1.** Пусть задан прямоугольный импульс

$$g_1(t) = \begin{cases} 3, & t \in [-3; 3] \\ 0, & t \in (-6; -3) \cup (3; 6). \end{cases} \quad (46)$$

Для сравнения спектральных характеристик периодического и непериодического сигналов продолжим сначала этот импульс периодически на всю числовую ось с периодом  $T = 2\ell = 12$  и построим график полученной периодической функции  $g_2(t)$  (рис. 10). Периодическая функция  $g_2(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле и может быть разложена в ряд Фурье. Функция  $g_2(t)$  четная, следовательно-

но,  $b_n = 0$  и все коэффициенты комплексного ряда Фурье являются действительными числами:

$$C_n = \frac{a_n}{2}. \quad (47)$$

Вычислим эти коэффициенты. Из формул (5) и (15) имеем:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int_{-6}^6 g_2(t) dt = \frac{1}{12} \int_{-3}^3 3 dt = \frac{3}{2}; \quad (48)$$

$$C_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int_{-6}^6 g_2(t) \cos \frac{\pi n t}{6} dt = \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{3(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (49)$$

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$g_2(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{3(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} \cdot e^{i \frac{\pi(2k-1)t}{6}} + \frac{3}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} \cdot e^{i \frac{\pi(2k-1)t}{6}}. \quad (50)$$

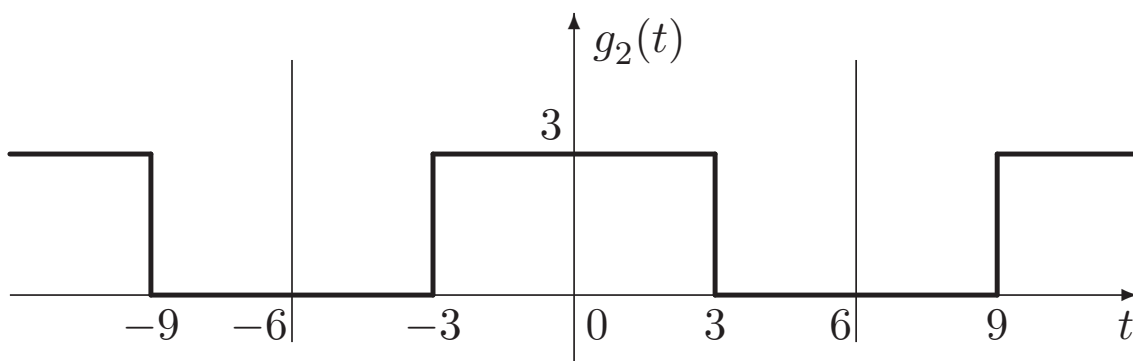


Рис. 10. График четного периодического импульса

Спектральная диаграмма действительных коэффициентов  $C_n$ , вычисленных по формулам (48) и (49), приведена на рис. 11. Для четной функции фазовый спектр  $\varphi_n = 0$ , коэффициенты  $C_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  откладываются на диаграмме со знаком в виде вертикальных отрезков соответствующей длины. Пунктирной линией показана огибающая дискретного спектра.

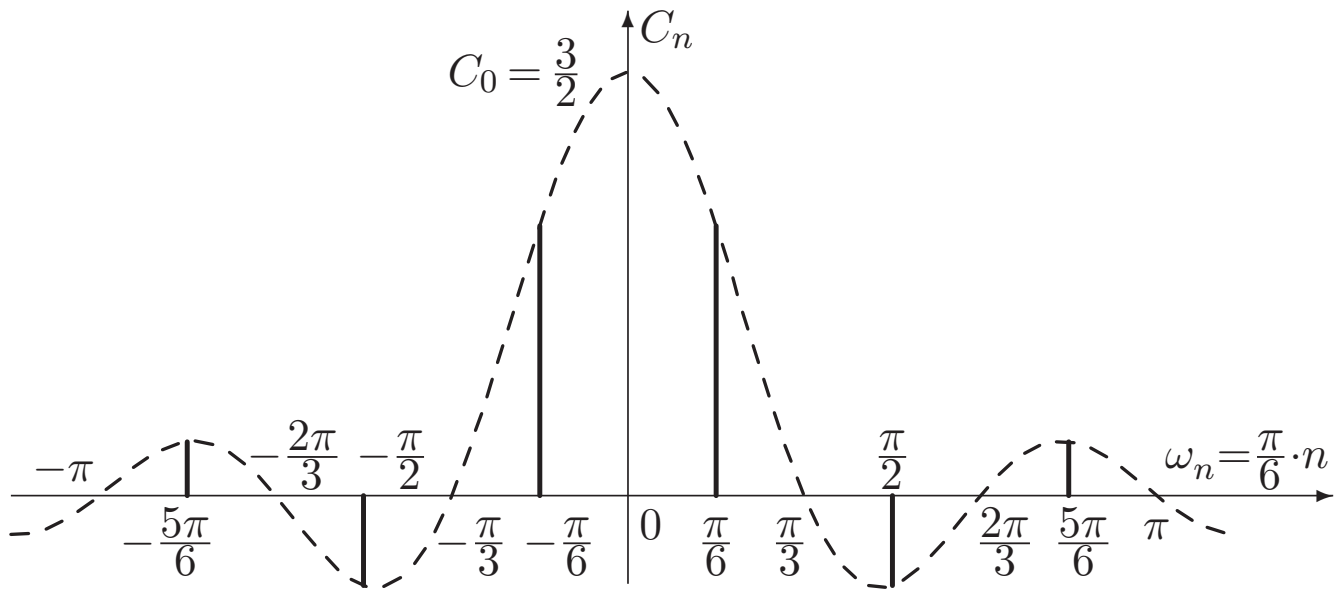


Рис. 11. Спектральная диаграмма коэффициентов  $C_n$  четного периодического сигнала

## 2.2. Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t \in [-3; 3] \\ 0, & t \notin [-3; 3]. \end{cases} \quad (51)$$

Эта четная функция не является периодической. Информацию о спектральных характеристиках непериодической функции несет непрерывная комплекснозначная функция — **спектральная плотность**, определяемая с помощью *прямого преобразования Фурье*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (52)$$

Спектральную плотность можно рассматривать как *математическую модель сигнала в частотной области*. Один и тот же сигнал допускает две равноправные математические модели: функцию  $g(t)$  во временной области и функцию спектральной плотности в области частот [2].

Условием существования спектральной плотности является *абсолютная интегрируемость* сигнала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (53)$$

Кроме того, функция  $g(t)$  должна иметь конечное число экс-

тремумов, а также конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном интервале. Очевидно, функция (41) удовлетворяет всем этим условиям.

Найдем ее спектральную плотность:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-3}^3 3 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{3}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-3}^3 = \\
 &= \frac{3 \cdot 2}{\omega} \cdot \frac{e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}}{2i} = 6 \frac{\sin 3\omega}{\omega} = 18 \operatorname{sinc}(3\omega). \quad (54)
 \end{aligned}$$

Здесь использована функция

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (55)$$

В силу того, что импульс (51) является **четной функцией**, его спектральная плотность (54) оказалась **действительной функцией**. График спектральной плотности приведен на рис. 12.

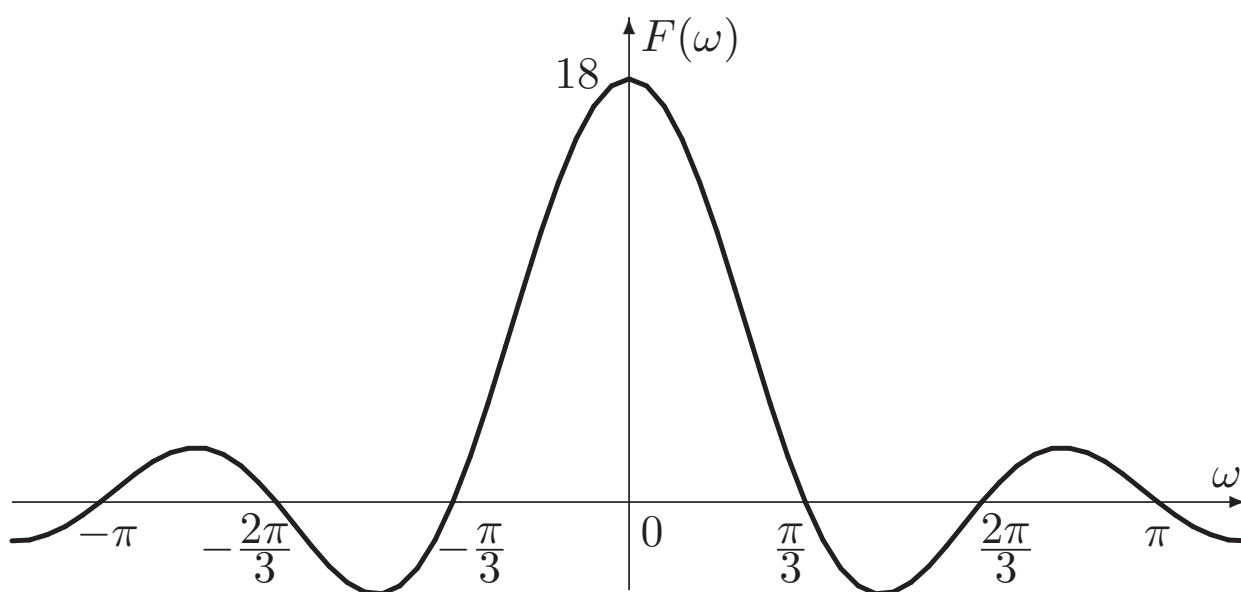


Рис. 12. График спектральной плотности четного импульса

Сравнивая рис. 11 и 12, можно сделать **вывод**: огибающая дискретного спектра периодического импульса совпадает по форме с графиком спектральной плотности аналогичного непериодического сигнала. По оси частот не происходит изменения масштаба, а амплитуда спектральной плотности увеличивается в  $2\ell$  раз, где  $\ell = 6$ . Теоретическое подтверждение этого факта следует из формул (17) и (52).



В общем случае спектральная плотность  $F(\omega)$  является комплекснозначной функцией. Модуль этой функции

$$S(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} F(\omega))^2 + (\operatorname{Im} F(\omega))^2} \quad (56)$$

называется *амплитудным* спектром сигнала [1], а аргумент

$$\Theta(\omega) = \arg F(\omega) \quad (57)$$

называется *фазовым* спектром сигнала [1]. Для четного сигнала

$$S(\omega) = F(\omega), \quad \Theta(\omega) = \operatorname{arctg} 0 + \pi k = \pi k. \quad (58)$$

**2.3.** Рассмотрим спектральную плотность импульса  $g_2(t)$ , полученную из (51) увеличением амплитуды в  $|a| = 2$  раза:

$$g_2(t) = \begin{cases} 6, & t \in [-3; 3] \\ 0, & t \notin [-3; 3]. \end{cases} \quad (59)$$

Для краткости записи введем *обозначение*: соответствие сигнала и спектральной плотности будем записывать как  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ .

Воспользуемся *свойством линейности* спектральной плотности:

$$\text{если } f(t) \leftrightarrow F(\omega), \text{ то } a \cdot f(t) \leftrightarrow a \cdot F(\omega) \quad \forall a = \text{const}. \quad (60)$$

Таким образом, спектральная плотность сигнала  $g_2(t)$  равна

$$S_2(\omega) = 36 \operatorname{sinc} 3\omega. \quad (61)$$

**Вывод:** при увеличении амплитуды импульса в  $a$  раз, амплитудный спектр сигнала увеличивается во столько же раз, а фазовый спектр сигнала не изменяется.

**2.4.** Рассмотрим спектральную плотность импульса  $g_3(t)$ , полученного из  $g_2(t)$  увеличением длительности в  $|b| = 4$  раза:

$$g_3(t) = \begin{cases} 6, & t \in [-12; 12] \\ 0, & t \notin [-12; 12]. \end{cases} \quad (62)$$

Воспользуемся *свойством изменения масштаба времени*:

$$\text{если } f(t) \leftrightarrow F(\omega), \text{ то } f(\alpha \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \forall \alpha > 0. \quad (63)$$

Так как  $g_3(t) = g_2\left(\frac{t}{4}\right)$ ,  $\alpha = \frac{1}{4}$ , то, согласно (63), спектральная плотность более длительного импульса будет равна

$$F_3(\omega) = 4F_2(4\omega) = 144 \operatorname{sinc}(12\omega). \quad (64)$$

**Вывод:** при увеличении длительности импульса в  $|b|$  раз амплитуда спектральной плотности увеличивается во столько же раз, и во столько же раз график спектральной плотности сжимается по оси частот. При уменьшении длительности импульса в  $|b|$  раз амплитуда спектральной плотности уменьшается во столько же раз, и во столько же раз график спектральной плотности растягивается по оси частот.

В радиотехнике это свойство называется *зависимостью между длительностью сигнала и шириной спектра* и имеет первостепенное значение. Так, чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр, поэтому короткие импульсные помехи, имеющие широкий спектр, могут ухудшить условия радиоприема в значительном диапазоне частот [2].

**2.5.** Рассмотрим сигнал  $g_4(t)$ , полученный из  $g_3(t)$  сдвигом на  $|c|=1$  сек по оси времени (рис. 13).

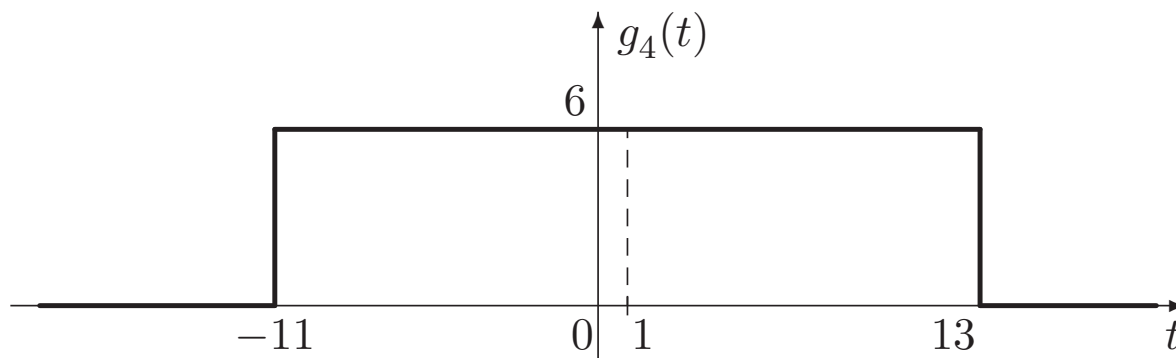


Рис. 13. График импульса, сдвинутого по оси времени

Для определения спектральной плотности воспользуемся *свойством сдвига сигнала во времени*:

$$\text{если } f(t) \leftrightarrow F(\omega), \text{ то } \begin{aligned} f(t - t_0) &\leftrightarrow e^{-i\omega t_0} F(\omega) \\ f(t + t_0) &\leftrightarrow e^{i\omega t_0} F(\omega). \end{aligned} \quad (65)$$

Так как  $g_4(t) = g_3(t - 1)$ , то новая спектральная плотность будет равна

$$F_4(\omega) = e^{-i\omega} F_3(\omega) = e^{-i\omega} 144 \operatorname{sinc}(12\omega). \quad (66)$$

Функция (66) является уже комплекснозначной. Однако

$$|F_4(\omega)| = |F_3(\omega)|, \quad (67)$$

следовательно, *амплитудный спектр сигнала не зависит от положения сигнала на оси времени. Фазовый спектр сигнала изменяется на величину  $-\omega t_0 = -\omega$* :

$$\Theta_4(\omega) = \Theta_3(\omega) - \omega t_0 = -\omega. \quad (68)$$

Справедливо и обратное утверждение: *если составляющим спектра дать фазовый сдвиг на  $\pm t_0$ , то сигнал сдвигается во времени на  $\pm t_0$ .*

# ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (ЧАСТЬ 3)

Найдем спектральную плотность сигнала

$$q(t) = \begin{cases} t \cdot e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (69)$$

График этой функции приведен на рис. 14.

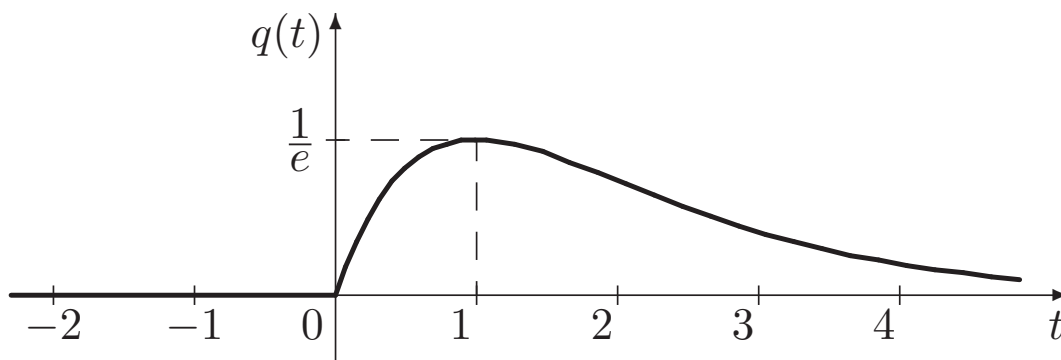


Рис. 14. График непериодической функции

Функция  $q(t)$  является абсолютно интегрируемой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)| dt = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} dt = 1 \quad (70)$$

и имеет только один максимум в точке  $t = 1$ . Следовательно, спектральная плотность функции  $q(t)$  существует и определяется по формуле

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \frac{-1}{1+i\omega} t e^{-t(1+i\omega)} \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ \frac{1}{1+i\omega} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt = \frac{-1}{(1+i\omega)^2} e^{-t(1+i\omega)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(1+i\omega)^2} = \\ &= \frac{1}{(1-\omega^2)+2i\omega} = \frac{(1-\omega^2)-2i\omega}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2} = \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2} - \frac{2i\omega}{(1+\omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Функция  $Q(\omega)$  является комплекснозначной. Модуль спектраль-

ной плотности (амплитудный спектр сигнала)

$$S(\omega) = |Q(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} Q)^2 + (\operatorname{Im} Q)^2} = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}{(1+\omega^2)^2} = \frac{1}{1+\omega^2}. \quad (72)$$

График амплитудного спектра сигнала (69) приведен на рис. 15.

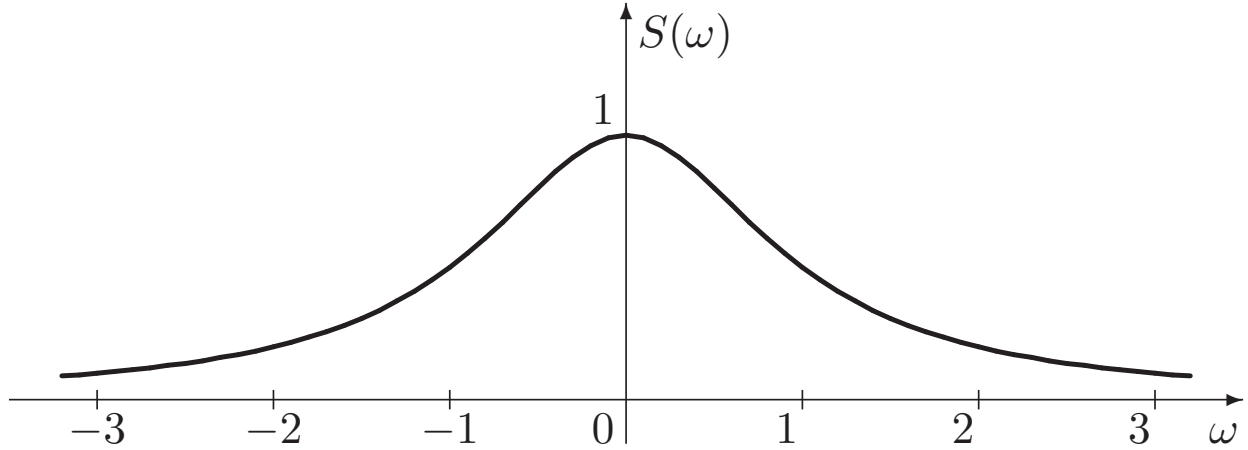


Рис. 15. График модуля спектральной плотности сигнала

Найдем фазовый спектр сигнала (66). Он равен аргументу спектральной плотности (рис. 16):

$$\Theta(\omega) = \arg Q(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Q}{\operatorname{Re} Q} = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\omega^2 - 1}. \quad (73)$$

Проверим выполнение равенства Парсеваля для неперiodического сигнала  $q(t)$  [4]:

$$E_q = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(\omega)|^2 d\omega. \quad (74)$$

Вычислим интеграл в левой части этого равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q^2(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t} dt = \left( -\frac{1}{2} t^2 e^{-2t} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}. \quad (75)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства Парсеваля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(1+\omega^2)} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \omega \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (76)$$

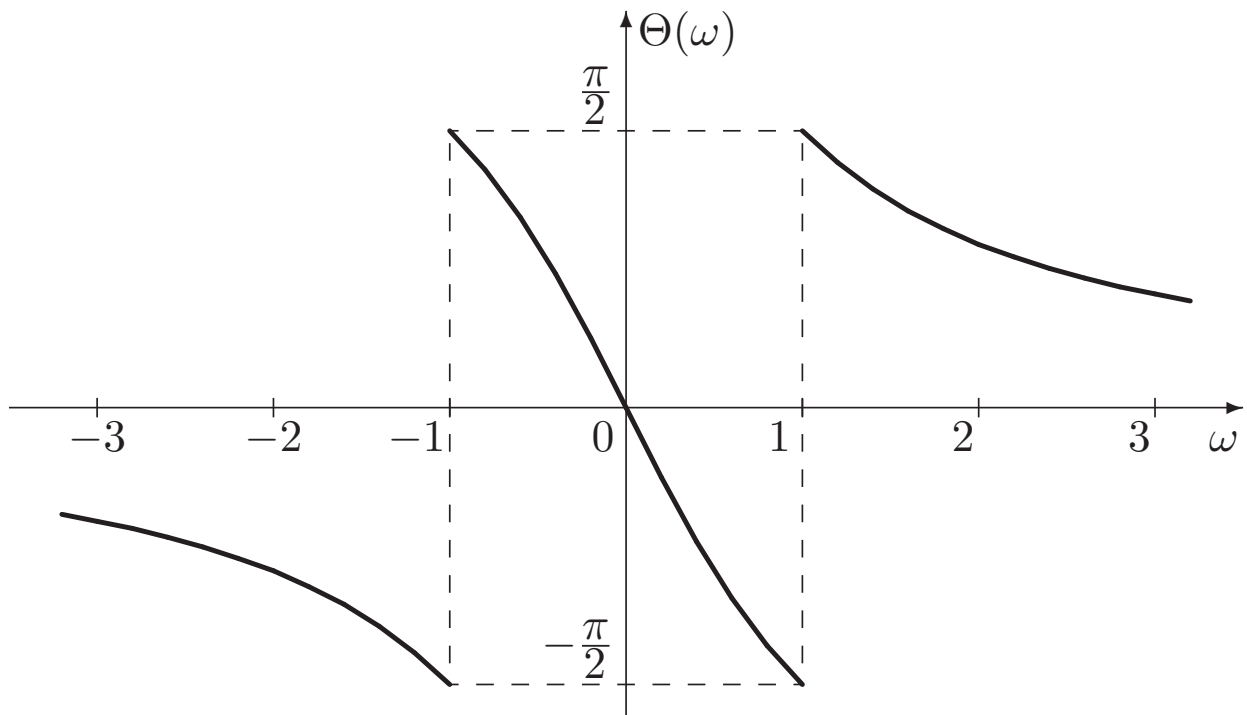


Рис. 16. График фазового спектра сигнала

Итак, равенство Парсеваля выполняется. Так как левая часть этого равенства есть полная энергия сигнала, из (74) следует, что *полная энергия непериодического сигнала равна сумме энергий всех его спектральных составляющих*. В этом состоит энергетический смысл равенства Парсеваля. Величина  $|Q(\omega)|^2$  имеет смысл энергии, приходящейся на 1 Гц, и может рассматриваться как *энергетический спектр* сигнала. Важно отметить, что энергия непериодического сигнала, как и периодического, не зависит от фазировки спектральных составляющих [1].

Отметим существенное отличие между равенствами Парсеваля для периодического (26), и непериодического (74) сигналов. В (26) речь идет о *средней мощности*, получаемой делением энергии за один период на длину периода. Для непериодического сигнала такое усреднение на бесконечном интервале дает нулевую среднюю мощность. Поэтому в случае непериодического сигнала можно говорить лишь о средней мощности на конечном интервале и смысл равенства Парсеваля — *полная энергия сигнала* [1].

## Список литературы

- [1] Гоноровский И.С., Демин М.П. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1994. 480с.
- [2] Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1988. 448с.
- [3] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981. 448с.
- [4] Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1980. 334с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Суммы некоторых рядов:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2 (на следующей странице)

Образец титульного листа курсовой работы.

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П.Королева

Кафедра  
высшей математики

Расчётно-пояснительная записка  
к курсовой работе  
по математике

Студент \_\_\_\_\_ Группа \_\_\_\_\_

Вариант № \_\_\_\_\_

Срок выполнения \_\_\_\_\_

Работа защищена с оценкой \_\_\_\_\_

Руководители \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Самара 2006



# ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант	$a$	$b$	$c$	$d$	$\ell$
1	1.5	0.5	-2	-0.5	1
2	2	3	1.5	0.5	1
3	2	0.5	3	-1	1
4	-2	0.5	1.5	-0.5	1
5	-1.5	-0.5	2	3	1
6	3	2	-1	0.5	2
7	4	2	2	-1	2
8	0.5	-2	-2	2	2
9	-2	4	2	-3	2
10	3	0.5	-2	-0.5	2
11	1.5	1.5	3	2	3
12	1.5	3	-2	1	3
13	-2	-3	2	0.5	3
14	-1.5	0.5	2	-3	3
15	-2	2	1	-2	3
16	-2	-0.5	2	0.5	3
17	-3	0.5	2	-1	1
18	2	0.5	1.5	-0.5	1
19	1.5	-0.5	-3	1	1
20	-2	-0.5	-1	0.5	1
21	-1.5	2	1.5	-1	4
22	1.5	3	-1	2	4
23	2	1.5	-1	0.5	2
24	3	2	-1.5	1	2
25	-3	-2	-2	1.5	2
26	-1.5	-2	-3	2	2
27	-0.5	4	1.5	-2	2
28	2	2	-4	3	4
29	1.5	3	-1	1	4
30	-2	0.5	3	-4	4

Учебное издание

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
ФУНКЦИЙ (СИГНАЛОВ)

Составители *Ефимов Евгений Александрович*  
*Коломиец Людмила Вадимовна*

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П. Королева.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического  
университета имени академика С.П. Королева.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.