ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТА ДОВУЗОВСКОЙ
ПОДГОТОВКИ СГАУ**

Самара 2006

Составители: Е. А. Ефимов, Л. В. Коломиец

УДК 510.2(075)

Задачи с параметрами: Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ /Самарский гос. аэрокосмический университет. Сост. Е. А. Ефимов, Л. В. Коломиец. Самара, 2006, 64 с.

Учебное пособие предназначено для занятий со слушателями подготовительных курсов факультета довузовской подготовки СГАУ и самостоятельной работы абитуриентов.

В учебное пособие включены все основные типы задач с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах по математике в СГАУ, на централизованном тестировании и Едином государственном экзамене. Ко всем задачам приведены решения или ответы.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева.

Рецензент: Е. Я. Горелова

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Практика вступительных экзаменов по математике в вузы показывает, что задачи с параметрами представляют для абитуриентов наибольшую сложность. Основная цель пособия — повысить математическую подготовку абитуриентов в рамках школьного курса математики.

Спецификой задач с параметрами является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа. Ответ в задачах с параметрами, как правило, имеет развернутый вид: при конкретных значениях параметра ответы могут значительно различаться.

В пособии рассмотрены основные методы и идеи решения задач с параметрами. Разбираемые и предлагаемые для самостоятельного решения задачи подобраны в соответствии с действующими программами вступительных экзаменов по математике. В основном это задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах в СГАУ за последние 10 лет, на централизованном тестировании (ЦТ) и Едином государственном экзамене (ЕГЭ).

Пособие охватывает важнейшие темы школьного курса математики: квадратный трехчлен, функции, графики, рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, системы уравнений, логарифмические, показательные и тригонометрические уравнения и неравенства. В ряде случаев опущены промежуточные этапы решения, которые абитуриент может восстановить самостоятельно. К задачам для самостоятельного решения приведены ответы.

Значения параметров и искомых величин считаются действительными (вещественными). Кратные корни многочленов считаются одним решением, если речь идет о числе корней (решений). Значения параметров, при которых задача не имеет смысла, включены в число тех значений, при которых задача не имеет решений.

Методические пособие предназначено для изучения методов решения задач с параметрами на подготовительных курсах СГАУ, а также будет полезно учащимся старших классов, самостоятельно готовящихся к конкурсным экзаменам по математике.

1. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Задача 1.1. (ЦТ) При каком значении параметра a парабола $y = 4ax^2 - 8x + 25$ имеет с осью Ox две общие точки?

Решение.

Данный квадратный трехчлен имеет два различных действительных корня, если выполняются условия:

$$\begin{cases} 4a \neq 0 \\ \dfrac{D}{4} = 16 - 100a > 0. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$.

Задача 1.2. (ЦТ) При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7$ можно представить в виде полного квадрата?

Решение.

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $a(x - x_0)^2$, если его корни равны $x_1 = x_2 = x_0$, т.е. $D = 0$. В данном случае $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0$. Решая последнее уравнение, получим $k = -\frac{22}{3}$ и $k = 2$.

Ответ: $k = -\frac{22}{3}$; $k = 2$.

Задача 1.3. (ЦТ) Найдите значение параметра a, при которых неравенство $(2a+1)x^2 + (a+2)x + \frac{3}{4} \geqslant 0$ выполняется при всех x.

Решение.

График квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ расположен не ниже оси Ox при выполнении условий:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leqslant 0. \end{cases}$$

В данной задаче эти условия имеют вид

$$\begin{cases} 2a + 1 > 0 \\ (a + 2)^2 - 3(2a + 1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением последней системы является $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Задача 1.4. (ЦТ) При каких значениях параметра a все корни уравнения $ax^2 - 2(a + 1)x + a - 3 = 0$ отрицательны?

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет один корень $x = -\frac{3}{2}$, который удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим случай $a \neq 0$. Для того, чтобы оба корня уравнения были отрицательны, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0. \end{cases}$$

Применяя теорему Виета, запишем эти условия в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = (a+1)^2 - a(a-3) \geqslant 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a-3}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a} < 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a \in [-\frac{1}{5}; 0)$. Ответ задачи объединяет два случая.

Ответ: $a \in [-\frac{1}{5}; 0]$.

Задача 1.5. (ЦТ) При каких значениях параметра a все корни уравнения $ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$ больше 1?

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет один корень $x = -1$, который требованиям задачи не удовлетворяет.

Рассмотрим случай $a \neq 0$. Заметим, что способ решения задачи 1.4. не может быть применим в данном случае, т.к. сравнение суммы и произведения корней с 1 являются необходимыми, но не достаточными условиями.

Опишем общий способ решения подобных задач. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше числа d, необходимо и достаточно выполнения условий (см. рис. 1):

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a} > d \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

Аналогично, требование того, чтобы корни были меньше числа d, означает выполнение условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a} < d \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

В данной задаче условия записываются в виде

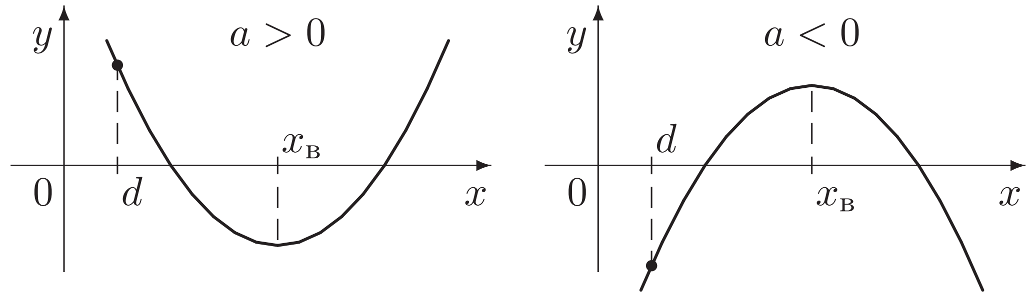


Рис. 1:

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geqslant 0 \\ \dfrac{2a+1}{2a} > 1 \\ a(a - 2a - 1 + 3a - 1) > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Очевидно, что тот же результат мы получили бы и решая неравенство $x_1 > 1$, где x_1 — меньший корень уравнения, однако такой способ является более сложным.

Ответ: $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Задача 1.6. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < -1 < x_2 < 1$?

Решение.

Задача равносильна следующей: при каких значениях параметра a только один (больший) корень квадратного трехчлена $f(x) = (3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3$ принадлежит интервалу $(-1;1)$, а другой корень меньше -1?

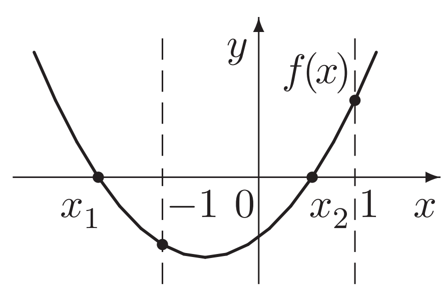


Рис. 2:

Из рис. 2 видно, что условием выполнения требований задачи является система

$$\begin{cases} (3a+2)\cdot f(-1) < 0 \\ (3a+2)\cdot f(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3a+2)(3a+2-a+1+4a+3) < 0 \\ (3a+2)(3a+2+a-1+4a+3) > 0. \end{cases}$$

Решением системы является интервал $a \in (-1; -\frac{2}{3})$.

Ответ: $a \in (-1; -\frac{2}{3})$.

Задача 1.7. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2-2(a-2)x+a-2 \leqslant 0$ имеет решения и все они являются решениями неравенства $x^2+9|x|-10 \leqslant 0$.

Решение.

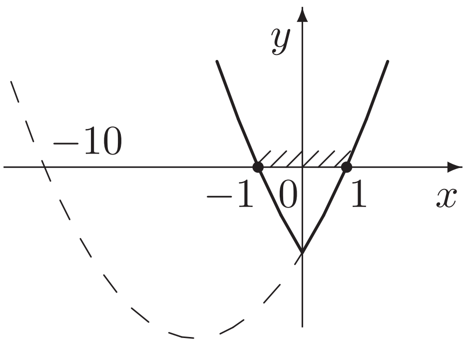


Рис. 3:

Второе неравенство лучше решать графически (рис. 3), построив график квадратного трехчлена $y = x^2 + 9|x| - 10$ с учетом четности функции (график симметричен относительно оси Oy). Решением второго неравенства является отрезок $[-1; 1]$.

Первое неравенство будет иметь решения, если $D \geqslant 0$, причем, так как ветви параболы $f(x) = x^2 - 2(a-2)x + a - 2$ направлены вверх, решением будет являться отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — меньший и больший корни.

По условию задачи нужно записать необходимые и достаточные условия того, что $[x_1; x_2] \in [-1; 1]$ или $\begin{cases} x_1 \geqslant -1 \\ x_2 \leqslant 1. \end{cases}$

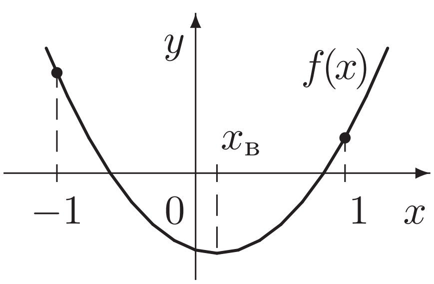


Рис. 4:

Такие условия имеют вид (рис. 4)

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ -1 \leqslant x_в \leqslant 1 \\ f(-1) \geqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

или в данном случае

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = (a-2)^2 - (a-2) \geqslant 0 \\ -1 \leqslant a - 2 \leqslant 1 \\ f(-1) = 1 + 2(a-2) + a - 2 \geqslant 0 \\ f(1) = 1 - 2(a-2) + a - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Решением системы является отрезок $\left[\frac{5}{3}; 2\right]$ и одна точка $a = 3$.

Ответ: $a \in \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup \{3\}$.

Задача 1.8. (СГАУ) При каких значениях параметра p отношение корней уравнения $2x^2 + (p-10)x + 6 = 0$ равно 12?

Решение.

Уравнение имеет действительные корни при $D \geqslant 0$, причем, если $x_2 = 12x_1$, то по теореме Виета составим систему

$$\begin{cases} D=(p-10)^2-48\geqslant 0 \\ x_2=12x_1 \\ x_1+x_2=-\dfrac{p-10}{2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{6}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2-20p+52\geqslant 0 \\ x_2=12x_1 \\ 13x_1=\dfrac{10-p}{2} \\ 12x_1^2=3 \end{cases}$$

Решением системы являются значения $p=-3$ и $p=23$.

Ответ: $p=-3$; $p=23$.

Задача 1.9. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ имеет ровно 4 различных действительных корня? При каких значениях параметра эти 4 корня образуют арифметическую прогрессию?

Решение.

Пологая $y=x^2$, получим квадратное уравнение

$$y^2+(a-5)y+(a+2)^2=0.$$

Первое требование задачи будет выполнено, если это квадратное уравнение имеет 2 различных положительных корня $y_1>y_2>0$. Аналогично задаче 1.4 составим систему:

$$\begin{cases} D>0 \\ y_1+y_2>0 \\ y_1\cdot y_2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-5)^2-4(a+2)^2>0 \\ 5-a>0 \\ (a+2)^2>0 \end{cases}$$

Решением системы является интервал $a\in(-9;-2)\cup(-2;\frac{1}{3})$. При этих значениях параметра a корни исходного уравнения будут иметь вид $-\sqrt{y_1}$; $-\sqrt{y_2}$; $\sqrt{y_2}$; $\sqrt{y_1}$.

Эти значения образуют арифметическую прогрессию, если разность между ними есть постоянное число:

$$d=\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}=\sqrt{y_2}-(-\sqrt{y_2})=-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1}.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{y_1}=3\sqrt{y_2}$ или $y_1=9y_2$. Аналогично задаче 1.8 составим по теореме Виета систему

$$\begin{cases} y_1=9y_2 \\ y_1+y_2=5-a \\ y_1\cdot y_2=(a+2)^2, \end{cases}$$

решением которой являются числа $a=-\dfrac{5}{13}$ и $a=-5$.

Ответ: $a=-\dfrac{5}{13}$; $a=-5$.

Задача 1.10. При каких значениях параметра a уравнение $x(x^{12}-ax^6+a^4)=0$ имеет ровно 5 корней, образующих арифметическую прогрессию?

Решение.

Один из корней уравнения очевиден — это $x=0$.

Положим $y = x^6 > 0$ при $x \neq 0$. Тогда уравнение запишется в виде $f(y) = y^2 - ay + a^4 = 0$. Это квадратное уравнение будет иметь различные положительные корни, если выполнены условия:

$$\begin{cases} D = a^2 - 4a^4 > 0 \\ y_{\text{в}} = \dfrac{a}{2} > 0 \\ f(0) = a^4 > 0. \end{cases}$$

Решением системы является интервал $a \in (0; \frac{1}{2})$. Запишем теперь условия, при которых корни исходного уравнения образуют арифметическую прогрессию. Пусть $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$ — корни уравнения после замены. Тогда пятью корнями, образующими арифметическую прогрессию, будут значения x вида

$$-\sqrt[6]{y_2}\,; \quad -\sqrt[6]{y_1}\,; \quad 0; \quad \sqrt[6]{y_1}\,; \quad \sqrt[6]{y_2},$$

где для определенности считаем $y_2 > y_1 > 0$. Тогда, по свойству арифметической прогрессии, ее разность

$$d = \sqrt[6]{y_2} - \sqrt[6]{y_1} = \sqrt[6]{y_1} - 0,$$

откуда $\sqrt[6]{y_2} = 2\sqrt[6]{y_1}$ или $y_2 = 64y_1$.

По теореме Виета из квадратного уравнения $y^2 - ay + a^4 = 0$ следует:

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = a^4 \\ y_1 + y_2 = a \\ y_2 = 64\,y_1 \end{cases}$$

Из этой системы находим $y_1 = \dfrac{a^2}{8}$; $y_2 = 8a^2$. Подставляя эти значения во второе уравнение системы, приходим к равенству $8a^2 + \dfrac{a^2}{8} = a$, откуда $a = \dfrac{8}{65}$ (значение $a = 0$ не удовлетворяет требованиям задачи).

Ответ: 5 корней при $a \in (0; \frac{1}{2})$; при $a = \dfrac{8}{65}$ корни образуют арифметическую прогрессию.

Задача 1.11. (ЦТ) При каких значениях параметра a графики функций $y_1 = (x-4)|x| - 1$ и $y_2 = a$ имеют 3 общие точки?

Решение.

Рассмотрим графический способ решения задачи. Построим график функции y_1, которая имеет вид:

$$y_1 = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 4x - x^2 - 1, & \text{если } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(рис. 5).}$$

Графиком $y_2 = a$ является прямая, параллельная оси Ox. Из рис. 5 видно, что графики функций y_1 и y_2 будут иметь 3 общие точки, если $a \in (-5; -1)$.

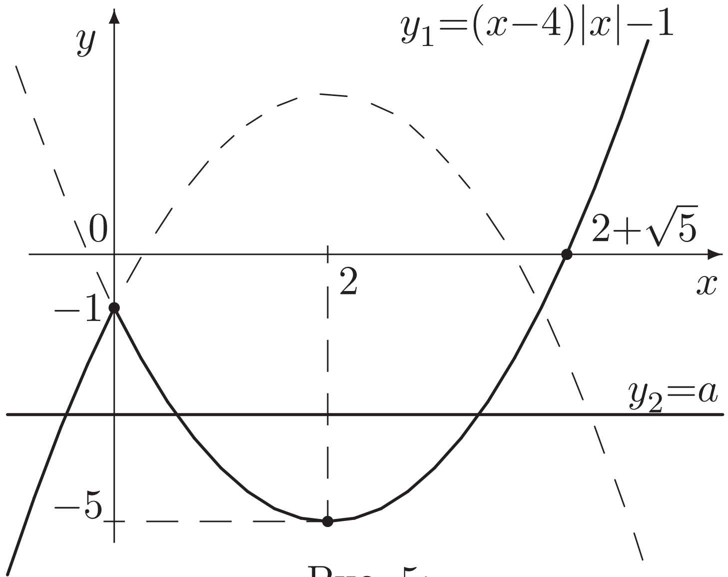


Рис. 5:

При $a = -1$ и $a = -5$ графики имеют 2 общие точки, при остальных значениях a — одну общую точку.

Ответ: $a \in (-5; -1)$.

Задача 1.12. (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения
$6x^2 + 2x^3 - 18x + n = 0$ в зависимости от параметра n.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2x^3 + 6x^2 - 18x = -n.$$

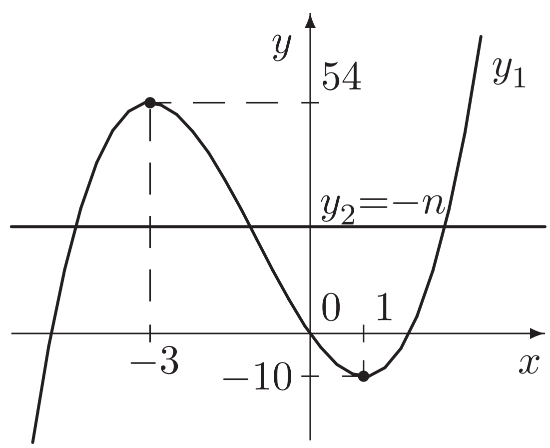


Рис. 6:

Аналогично задаче 1.11 построим на одном чертеже графики функций $y_2 = -n$ и схематичный график $y_1 = 2x^3+6x^2-18x$ Для этого найдем производную: $y_1' = 6x^2+12x-18$ и критические точки $x_1=-3$ и $x_2=1$. Исследуя знаки производной, нетрудно убедиться, что $x_1 = -3$ — точка максимума, а $x_2 = 1$ — точка минимума, причем $y_{\max}(-3) = 54$; $y_{\min}(1) = -10$. Функция y_1 возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$ и убывает на интервале $(-3; 1)$.

Из рис. 6 видно, что исходное уравнение имеет три корня при $-10 < -n < 54$ или $-54 < n < 10$; два корня при $n = -54$ и $n = 10$; один корень при $n < -54$ и $n > 10$.

Ответ:

При	$n \in (-\infty; -54) \cup (10; +\infty)$	один корень,
при	$n = -54$ и $n = 10$	два корня,
при	$n \in (-54; 10)$	три корня.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.13. (ЦТ) При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y = ax^2 - (a+4)x + a + 2$ отрицателен при любых значениях x?

Ответ: $a < -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Задача 1.14. (ЦТ) При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y = (a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 2$ не принимает отрицательных значений?

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

Задача 1.15. (ЦТ) При каких значениях параметра a парабола $y = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$ имеет с осью Ox две общие точки?

Ответ: $(-\frac{16}{7}; -1) \cup (-1; 0)$.

Задача 1.16. При каких значениях параметра a графики функций $y_1 = 2ax + 1$ и $y_2 = (a-6)x^2 - 2$ имеют только одну общую точку?

Ответ: $a = \pm 6$; $a = 3$.

Задача 1.17. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a^2 - a = 0$ имеет более двух корней?

Ответ: $a = 1$.

Задача 1.18. (ЦТ) При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y = x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5$ можно представить в виде полного квадрата?

Ответ: $a = 1$; $a = 6$.

Задача 1.19. (ЦТ) При каких значениях параметра a корни квадратного трехчлена $y = ax^2 - 3x + 5 - a$ положительны?

Ответ: $(0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{9}{2}; 5)$.

Задача 1.20. (ЦТ) При каких значениях параметра a график квадратного трехчлена $y = ax^2 + (a-3)x + a$ имеет общие точки с положительной полуосью Ox ?

Ответ: $a \in (0;1]$.

Задача 1.21. (ЦТ) При каких значениях параметра a корни квадратного уравнения $(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$ отрицательны?

Ответ: $a > 1$.

Задача 1.22. (ЦТ) При каких значениях параметра a оба корня уравнения $4a^2x^2 - 8ax + 4 - 9a^2 = 0$ больше 3?

Ответ: $(0; \frac{2}{9})$.

Задача 1.23. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2+(a-9)x+a-1 = 0$ различны и больше 1.

Ответ: $a \in (4{,}5; 5)$.

Задача 1.24. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2+(a-7)x+a+8 = 0$ различны и больше 2.

Ответ: $a \in (\frac{2}{3}; 1)$.

Задача 1.25. (ЦТ) При каких значениях параметра b корни уравнения $x^2 - 3x + 2b + 3 = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 3x_2 = 23$?

Ответ: $b = -15{,}5$.

Задача 1.26. В уравнении $x^2 - 4x + p = 0$ найдите значение параметра p, если известно, что сумма квадратов его корней равна 14.

Ответ: $p = 1$.

Задача 1.27. При каких значениях параметра a разность между корнями уравнения $4x^2 - 16x + a^2 - 2 = 0$ равна 3?

Ответ: $a = \pm 3$.

Задача 1.28. При каких значениях параметра p один из корней уравнения $4x^2 - (3+2p)x + 2 = 0$ в 8 раз больше другого?

Ответ: $p = -6$; $p = 3$.

Задача 1.29. При каком положительном значении параметра c один из корней уравнения $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ равен квадрату другого?

Ответ: $c = \frac{1}{3}$.

Задача 1.30. (ЦТ) При каких значениях параметра a графики функций $y_1 = |x| \cdot (x-1)$ и $y_2 = a$ имеют только одну общую точку?

Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; +\infty)$.

Задача 1.31. (ЦТ) Найдите число корней уравнения
$|x^2 + ax| = 2a$ в зависимости от значений параметра a.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0)$: нет решений,
если $a = 0$: 2 корня,
если $a \in (0; 8)$: 4 корня,
если $a = 8$: 3 корня,
если $a \in (8; +\infty)$: 2 корня.

Задача 1.32. При каком значении параметра a уравнения
$x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

Ответ: $a = -6$.

Задача 1.33. При каком значении параметра a любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ по модулю не превосходит двух?

Ответ: $a \in [-2; -\frac{1}{2}]$.

Задача 1.34. При каком значении параметра a корни уравнения $ax^2 - (a^3 + 2a^2 + 1)x + a(a+2) = 0$ принадлежат отрезку $[0; 1]$?

Ответ: $a = 0$.

Задача 1.35. При каком значении параметра a один из корней уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (a-1)x + a^2 = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

Ответ: нет решений.

Задача 1.36. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1 < a < x_2$?

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

Задача 1.37. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ принадлежат интервалу $(2; 5)$?

Ответ: $a \in [-\frac{16}{7}; -2)$.

Задача 1.38. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a-5)x^2 - 2ax + a - 4 = 0$ меньше 1, а другой больше 2?

Ответ: $a \in (5; 24)$.

Задача 1.39. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2(a+4)x + 18a \leqslant 0$ имеет решения и все они являются решениями неравенства $x^2 - 7|x| - 8 \leqslant 0$.

Ответ: $a \in [0; 2]$

Задача 1.40. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2(a-2)x + 4a - 11 \leqslant 0$ имеет решения и все они являются решениями неравенства $x^2 - |x| - 6 \leqslant 0$.

Ответ: $a \in [\frac{7}{5}; 3] \cup \{5\}$

Задача 1.41. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4 + (a-6)x^2 + (a+1)^2 = 0$ имеет 4 действительных корня. Определите все a, при которых эти корни образуют арифметическую прогрессию. Запишите эту прогрессию для целого значения a.

Ответ: $a \in [-8; \frac{4}{3}]$; $a = \frac{8}{13}$, $a = -4$;
$\div -3; -1; 1; 3$ или $3; 1; -1; -3$.

Задача 1.42 (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^5 + (a-4)x^3 + (a+3)^2 x = 0$ имеет 5 действительных корней. Определите все a, при которых эти корни образуют арифметическую прогрессию. Запишите эту прогрессию для целого значения a.

Ответ: $a \in [-10; -\frac{2}{3}]$; $a = -\frac{23}{3}$, $a = -1$;
$\div -2; -1; 0; 1; 2$ или $2; 1; 0; -1; -2$.

Задача 1.43. При каком значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$ имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию? Найдите эти корни.

Ответ: $a = -8:$ $x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Задача 1.44. Найдите все значения параметра a, при которых ровно один корень уравнения $x^2 + 2(a-2)x + 4 - 3a = 0$ удовлетворяет неравенству $x > 1$.

Ответ: $a = 0$; $a > 1$.

Задача 1.45. Найдите все значения p и q, для которых числа $p+2q$ и $4p+7q$ являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Ответ: $(0;0)$; $(-3;2)$; $(-\frac{15}{4};\ -\frac{9}{4})$.

Задача 1.46. (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения $-3x^2+x^3+9x=a$ в зависимости от значений параметра a.

Ответ: $a \in (-27;-13)$ — 3 корня.

Задача 1.47. (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения $x^3-2x+3=a$ в зависимости от значений параметра a.

Ответ: $a \in (-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+3;\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+3)$ — 3 корня.

Задача 1.48. (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения $x^3-7x+5=a$ в зависимости от значений параметра a.

Ответ: $a \in \left(5-\frac{14}{9}\sqrt{\frac{7}{3}};\ 5+\frac{14}{9}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ — 3 корня.

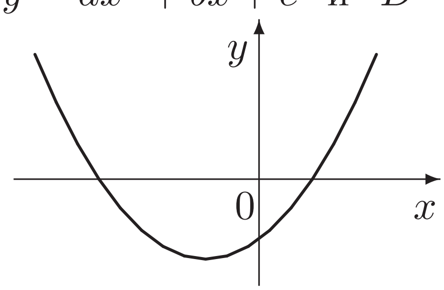
Задача 1.49. (ЦТ) Квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ удовлетворяет условиям: $f(-3)>6$; $f(1)>7$; $f(2)<6$. Что можно сказать о знаках параметров a, b, c?

Ответ: $b<0$, $c>0$, о знаке a ничего утверждать нельзя.

Задача 1.50. (ЦТ) Вершина параболы, задаваемой уравнением $y=ax^2+bx+c$, где $a<0$, $b<0$, $c\leqslant 0$ и $D=b^2-4ac<0$ лежит
1) строго в I четверти;
2) строго во II четверти;
3) строго в III четверти;
4) строго в IV четверти;
5) возможно, на координатной оси.

Ответ: 3.

Задача 1.51. (ЦТ) Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ и $D=b^2-4ac$, то справедливо соотношение



1) $ac>0$
2) $cD>0$
3) $ab<0$
4) $bc>0$
5) $bD>0$

Ответ: 5.

2. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА

Задача 2.1. (ЦТ) Найдите все значения параметра a, при которых графики функций $y_1 = \dfrac{|x+2|}{x+2}$ и $y_2 = |x-a|$ имеют одну общую точку.

Решение.

Построим на одном чертеже графики функций y_1 и y_2. График $y_1 = \begin{cases} 1, x > -2 \\ -1, x < -2 \end{cases}$ состоит из двух лучей, параллельных оси Ox и не существует при $x = -2$. График функции $y_2 = |x-a|$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом влево при $a < 0$ и сдвигом вправо при $a > 0$.

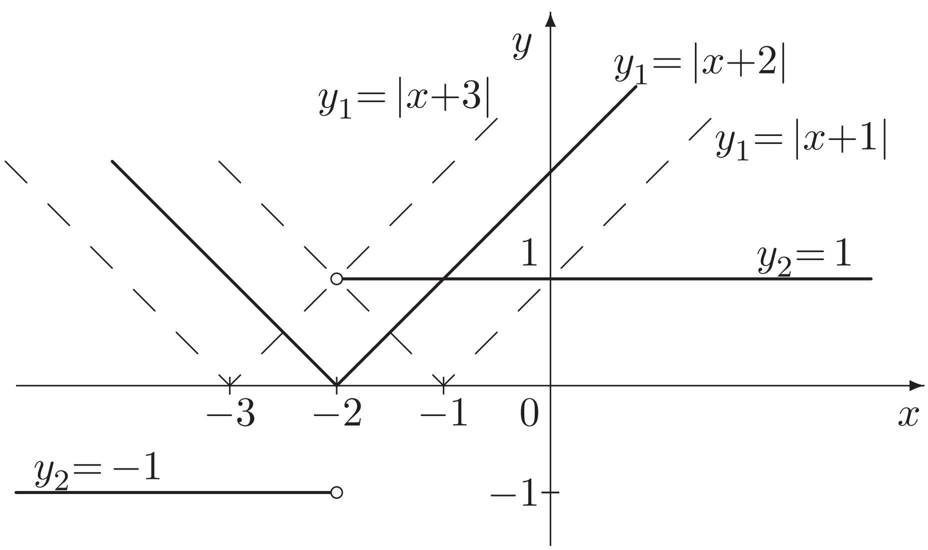


Рис. 7:

Из рис. 7 следует, что графики y_1 и y_2 имеют одну общую точку, если $a \in (-3; -1]$. При $a = -3$ общих точек нет, т.к. график $y_2 = |x+3|$ проходит через проколотую точку графика y_1.

Ответ: $a \in (-3; -1]$.

Задача 2.2. (ЦТ) Укажите все значения параметра $a \neq 0$, при которых графики функций $y_1 = |x^2 + 3ax|$ и $y_2 = -3a$ имеют только две общие точки.

Решение.

Прежде всего заметим, что уравнение $|x^2 + 3ax| = -3a$ может иметь решения только при $a < 0$ ($a \neq 0$ по условию). График $y_1 = |x^2 + 3ax|$ получается из параболы $y = x^2 + 3ax$ отражением

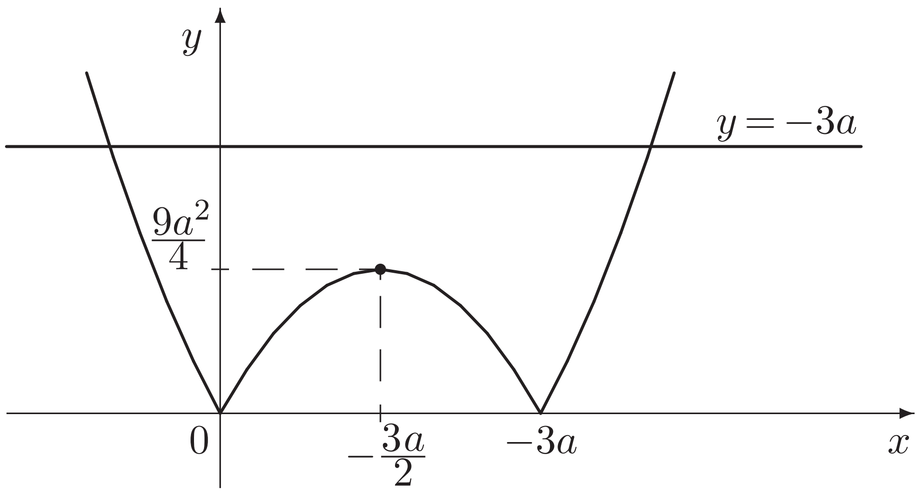


Рис. 8:

отрицательной части симметрично оси Ox. Корни этой параболы $x_1=0$ и $x_2=-3a>0$, вершина находится в точке $x_в=-\frac{3a}{2}>0$ и $y_в=\left|\left(-\frac{3a}{2}\right)^2-3a\frac{3a}{2}\right|=\frac{9a^2}{4}$. Графиком $y_2=-3a$ является прямая, параллельная оси Ox.

Из рис. 8 следует, что графики y_1 и y_2 имеют две общие точки $(a\neq 0)$ при условии, что $-3a>y_в \Rightarrow -3a>\frac{9a^2}{4} \Rightarrow 3a^2+4a<0$ $\Rightarrow a\in(-\frac{4}{3};0)$.

Ответ: $a\in(-\frac{4}{3};0)$.

Задача 2.3. (СГАУ) При каких значениях параметра a все решения уравнения $2\sqrt{x^2-2ax+a^2}+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant 4$?

Решение.

Данное уравнение равносильно следующему: $2|x-a|+x+a-4=0$, решением последнего являются значения $x=3a-4$ при $x<a$ и $x=\frac{1}{3}(a+4)$ при $x\geqslant a$. Поставленная задача сводится к решению двух систем неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} 3a-4<a \\ 3a-4\geqslant 0 \\ 3a-4\leqslant 4 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{a+4}{3}\geqslant a \\ \frac{a+4}{3}\geqslant 0 \\ \frac{a+4}{3}\leqslant 4. \end{array}\right.$$

Решением первой системы являются все $a\in\left[\,\frac{4}{3};2\,\right)$, а второй системы — все $a\in[-4;2\,]$. Взяв пересечение этих множеств, получим

$a \in \left[\,\frac{4}{3}; 2\,\right)$. Кроме того, при $a = 2$ исходное уравнение имеет один корень $x = 2$, удовлетворяющий условию.

Ответ: $a \in \left[\,\frac{4}{3}; 2\,\right]$.

Задача 2.4. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a определите количество решений системы $\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Решение.

С геометрической точки зрения количество решений системы — это число точек пересечения при каждом фиксированном значении параметра a кривых, заданных уравнениями системы. Рассматривая в первом уравнении 4 случая и раскрывая модули, получим, что это уравнение задает квадрат (рис. 9). Второе уравнение — это семейство окружностей радиуса $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ с центром в начале координат. При $a = 0$ окружность вырождается в точку. Из рис. 9 следует, что когда окружность касается квадрата изнутри, т.е. при $\sqrt{a} = 2\sqrt{2}$ $(a = 8)$ и при $\sqrt{a} = 4$ $(a = 16)$ (окружность проходит через вершины квадрата) система имеет 4 решения. При $8 < a < 16$ общих точек у окружности и квадрата 8. При $a < 8$ и $a > 16$ решений нет.

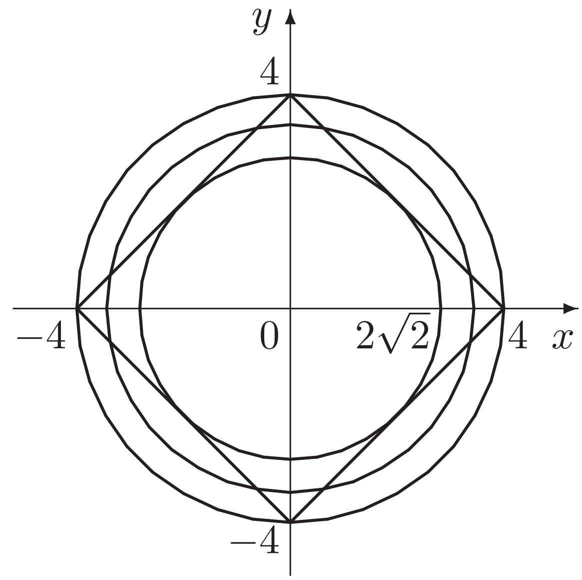


Рис. 9:

Ответ: Если $a \in (-\infty; 8) \cup (4; +\infty)$: решений нет,
если $a = 8;\ a = 16$: четыре решения,
если $a \in (8; 16)$: 8 решений.

Задача 2.5. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a найдите решения уравнения $|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6$.

Решение.

С геометрической точки зрения решения уравнения — это точки пересечения кривых, задаваемых левой и правой частью уравнения. Раскрывая модули в левой части, получим, что график функции $y_1 = |2x + 3| + |2x - 3|$ — это ломаная линия (рис. 10). Правая часть $y_2 = ax + 6$ задает на плоскости семейство прямых, проходящих через точку $A(0; 6)$ и имеющих переменный угол наклона к оси Ox

$\operatorname{tg}\alpha = a$. Из рисунка видно, что при $a = 0$ $(\alpha = 0^\circ)$ ломаная и прямая имеют бесконечное число точек пересечения $x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$.

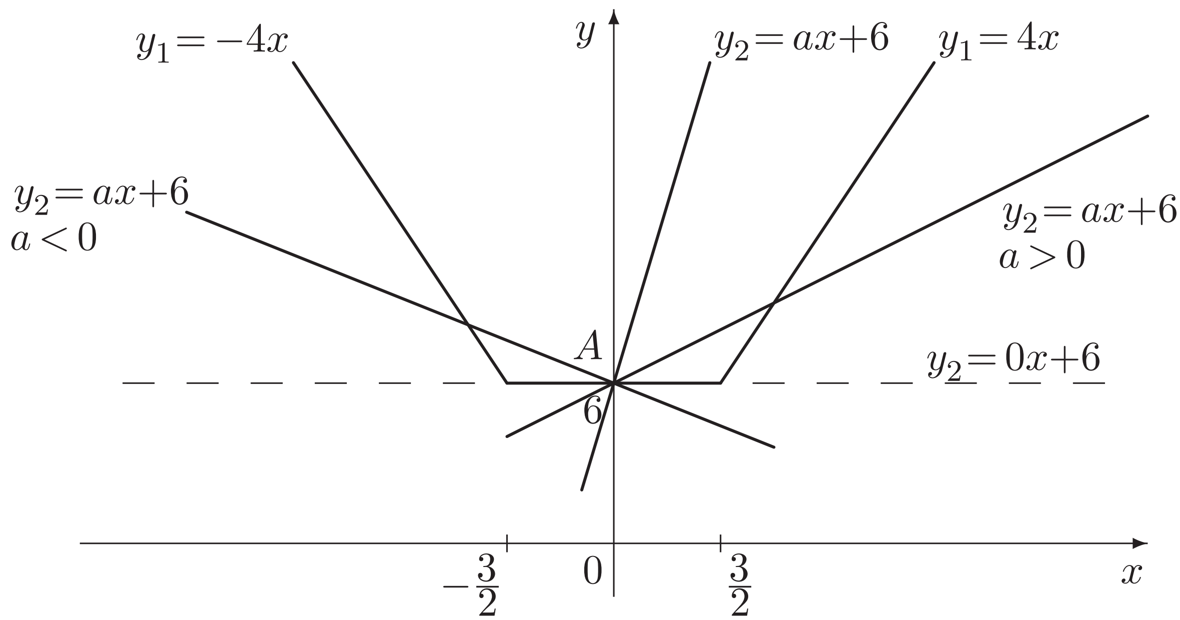


Рис. 10:

Правая часть ломаной имеет уравнение $y_1 = 4x$ $(\operatorname{tg}\alpha = 4)$, поэтому при изменении параметра $a \in (0; 4)$ ломаная и прямые из семейства имеют две точки пересечения: одна из них $x = 0$, а вторая находится из уравнения $ax + 6 = 4x \Rightarrow x = \dfrac{6}{4-a}$.

При $a = 4$ графики $y_1 = 4x$ и $y_2 = ax + 6$ параллельны, точка пересечения с ломаной только одна: $x = 0$.

При $a \in (4; +\infty)$ в семействе прямых увеличивается угол наклона до 90°, поэтому точка пересечения с ломаной только одна: $x = 0$.

Рассуждая аналогично, получим, что при $a \in (-4; 0)$ будет два решения: $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{6}{a+4}$, а при $a \in (-\infty; -4]$ — одно решение $x = 0$.

Ответ:

Если	$a \in (-\infty; -4]$	:	$x = 0$,
если	$a \in (-4; 0)$	:	$x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{6}{a+4}$,
если	$a = 0$	:	$x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$,
если	$a \in (0; 4)$	:	$x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{6}{4-a}$,
если	$a[4; +\infty)$	:	$x = 0$.

Задача 2.6. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 4|x - a| \geqslant a^2$ справедливо для всех значений x?

Решение.

При $x \geqslant a$ неравенство равносильно следующему:

$$x^2 + 4(x-a) - a^2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad (x-a)\big(x-(-a-4)\big) \geqslant 0.$$

Последнее квадратное неравенство будет справедливо для всех x из промежутка $x \geqslant a$, если выполняется условие $a \geqslant -a-4$, т.е. $a \geqslant -2$.

Если $x < a$, то по аналогии с предыдущим случаем приходим к неравенству $(x-a)\big(x-(4-a)\big) \geqslant 0$, которое справедливо для всех x из рассматриваемого промежутка при $a \leqslant 4-a$, т.е. $a \leqslant 2$.

Ответ: $a \in [-2; 2]$.

Задача 2.7. При каких значениях параметра a неравенство

$2 > |x+a| + x^2$ имеет положительные решения?

Решение.

Данное неравенство равносильно следующему: $2 - x^2 > |x+a|$. Введем в рассмотрение функции $y_1 = 2 - x^2$ и $y_2 = |x+a|$, графики которых приведены на рис. 11.

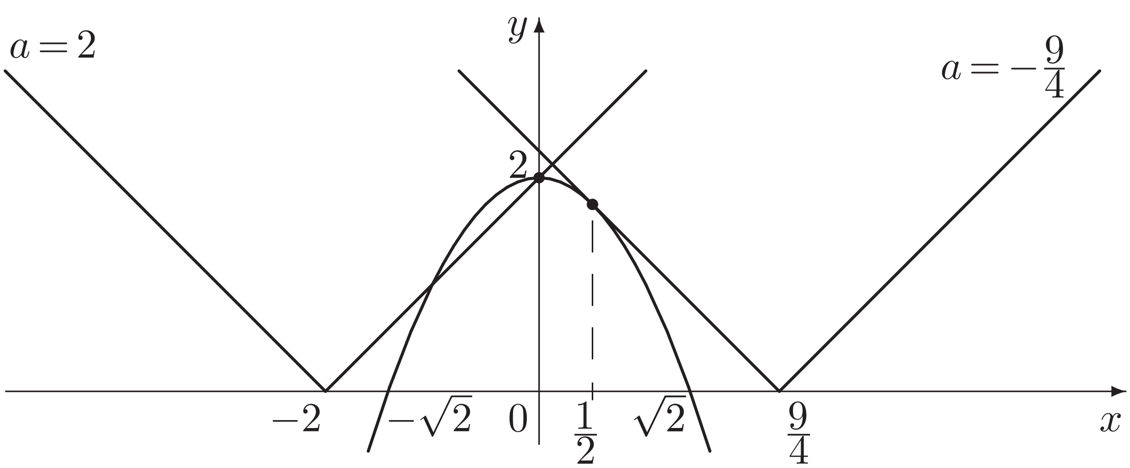


Рис. 11:

Для фиксированного значения a положительным решением неравенства будет то положительное x_0, при котором точка графика $y_1(x_0) = 2 - x_0^2$ лежит выше точки графика $y_2(x_0) = |x_0 + a|$.

Заметим, что при $a = 2$ график функции $y_2 = |x+2|$ проходит через точку с координатами $(0; 2)$. При движении графика y_2 вправо (и уменьшении a) графики двух функций имеют точку пересечения $x_0 > 0$, причем парабола выше графика с модулем. Это значит, что неравенство имеет положительные решения.

Найдем теперь значение a, при котором графики касаются в точке с положительной абсциссой. Очевидно, это будет при условии

$x+a<0$, т.е. $2-x^2=-x-a$. Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x=\dfrac{1}{2}$ при $D=0$ или $a=-\dfrac{9}{4}$.

Таким образом, при $a\in[-\frac{9}{4};2)$ два графика имеют общую точку на интервале $x\in(0;\sqrt{2})$, а исходное неравенство имеет положительные решения.

Ответ: $a\in[-\frac{9}{4};2)$.

Задача 2.8. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $a-x>\big|1-|x|\big|$.

Решение.

Перепишем исходное неравенство в виде $a>x+\big||x|-1\big|$. Рассмотрим две функции $y_1=a$ (график — прямая, параллельная оси Ox) и $y_2=x+\big||x|-1\big|$. Вторую функцию, раскрывая модули, можно записать так:

$$y_2(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad x<-1 \\ 2x+1, & \text{если} \quad -1\leqslant x<0 \\ 1, & \text{если} \quad 0\leqslant x<1 \\ 2x-1, & \text{если} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

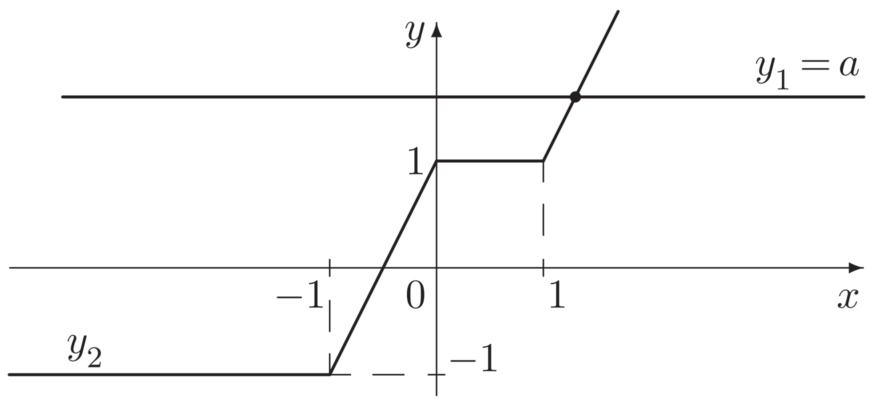


Рис. 12:

Графиком $y_2(x)$ является ломаная, приведенная на рис. 12. Решениями неравенства будут те значения x, при которых точки графика $y_1=a$ лежат выше точек графика $y_2(x)$. Из рис. 12 получаем, что при $a\leqslant-1$ таких точек нет, при $a\in(-1;1)$ — это точки вида $a>2x+1$, т.е. $x<\dfrac{a-1}{2}$; при $a=1$ решением является промежуток $x<0$, а при $a>1$ решения получаются из неравенства $a>2x-1$, откуда $x<\dfrac{a+1}{2}$.

Ответ: Если $a \leqslant -1$: решений нет,
если $-1 < a \leqslant 1$: $x < \dfrac{a-1}{2}$,
если $a > 1$: $x < \dfrac{a+1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.9. (ЦТ) Укажите все значения параметра $a \neq 0$, при которых графики функций $y = |x^2 - 2ax|$ и $y = 3a$ имеют только две общие точки.

Ответ: $a \in (\,0; 3\,)$.

Задача 2.10. (ЦТ) Укажите все значения параметра $a \neq 0$, при которых графики функций $y = |3x^2 + ax|$ и $y = -\dfrac{a}{6}$ имеют только две общие точки.

Ответ: $a \in (-2; 0\,)$.

Задача 2.11. (ЦТ) Укажите все значения параметра a, при которых графики функций $y = \dfrac{|x+7|}{x+7}$ и $y = (x+a)^2$ имеют одну общую точку.

Ответ: $a \in [\,6; 8\,)$.

Задача 2.12. (ЦТ) Укажите все значения параметра a, при которых графики функций $y = \dfrac{x-5}{|x-5|}$ и $y = |x+a|$ имеют одну общую точку.

Ответ: $a \in [-6; -4\,)$.

Задача 2.13. (СГАУ) Найдите все значения параметра a, при которых все решения уравнения $3\sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2} - 3a + x - 15$ принадлежат отрезку $[4; 9]$.

Ответ: $a \in [-3; -\dfrac{23}{9}]$.

Задача 2.14. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

Ответ: $a = \sqrt{15}$.

Задача 2.15. (ЦТ) Найдите наименьшее целое неотрицательное значение параметра a, при котором система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6|x| + 8 \leqslant 0 \\ a^2 - x^2 > 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $a = 2$.

Задача 2.16. (ЦТ) Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором система неравенств
$$\begin{cases} |x-4|(x-6) \geqslant 0 \\ x^2 - a^2 < 0 \end{cases}$$ не имеет решений.

Ответ: $a = 4$.

Задача 2.17. (ЦТ) Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором система неравенств
$$\begin{cases} |x+4|(x+2) \geqslant 0 \\ \sqrt{a-x} > 0 \end{cases}$$ не имеет решений.

Ответ: $a = -4$.

В зависимости от значений параметра a решите уравнения:

Задача 2.18. $|x^2 + 2ax| = 1$.

Ответ: Если $|a| \geqslant 1$: четыре корня $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+1}$, $x_{3,4} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$;
если $|a| < 1$: два корня $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+1}$.

Задача 2.19. $|x-a| + |x-2a| = 3a$.

Ответ: Если $a < 0$: решений нет;
если $a = 0$: $x = 0$;
если $a > 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 3a$.

Задача 2.20. $|x| + |x-2| + a = 0$.

Ответ: Если $a < -2$: $x_{1,2} = 1 \pm \dfrac{a}{2}$;
если $a = -2$: $x \in [0; 2]$;
если $a > -2$: решений нет.

Задача 2.21. (СГАУ) $|5x+2| + |5x-2| = ax + 2$.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -10\,]$: $x = \dfrac{2}{a}$;
если $a \in (-10; -5]$: $x_1 = \dfrac{2}{a}$, $x_2 = -\dfrac{2}{a+10}$;
если $a \in (-5; 5)$: решений нет;
если $a \in [\,5;\,10\,)$: $x_1 = \dfrac{2}{a}$, $x_2 = \dfrac{2}{10-a}$;
если $a \in [\,10; +\infty)$: $x = \dfrac{2}{a}$.

Задача 2.22. (СГАУ) Установите, при каких значениях параметра a уравнение $|3x+4| + |3x-4| = ax + 8$ имеет конечное число решений и найдите их.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6\,]:\ x = 0;$
если $a \in (-6; 0)\ :\ x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{8}{6+a};$
если $a \in (\,0;\,6\,)\ :\ x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{8}{6-a};$
если $a \in [\,6; +\infty)\ :\ x = 0.$

В зависимости от значений параметра a решите неравенства:

Задача 2.23. $|x - 3a| - |x + a| < 2a.$

Ответ: Если $a < 0:\ x < 2a;$
если $a = 0:$ решений нет;
если $a > 0:\ x > 0.$

Задача 2.24. $|x + 2| - |2x + 8| \geqslant a.$

Ответ: Если $a < -4:\ \ a - 6 \leqslant x \leqslant -a - 6;$
если $-4 \leqslant a < 2:\ \ a - 6 \leqslant x \leqslant -\dfrac{a + 10}{3};$
если $a = 2:$ единственное решение $x = -4;$
если $a > 2:$ решений нет.

Задача 2.25. $|x^2 - 5x + 6| < ax.$

Указание. Рассмотреть графики параболы $|x^2 - 5x + 6|$ и семейство прямых $y = ax.$ При $-5 - 2\sqrt{6} \leqslant a \leqslant 0$ решений нет.

Задача 2.26. При каких значениях параметра a неравенство $|ax^2 - ax + 1| \leqslant 1$ выполняется для всех значений x из промежутка $[0; 1]$?

Ответ: $0 \leqslant a \leqslant 8.$

Задача 2.27. При каких значениях параметра a неравенство $3-|x-a| > x^2$ имеет по крайней мере одно отрицательное решение?

Ответ: $-\dfrac{13}{4} < a < 3.$

Задача 2.28. В зависимости от значений параметра a выясните число решений уравнения $|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a.$

Ответ: Если $a < 2\ :$ решений нет;
если $a = 2\ :\ x \in (-\infty; +\infty);$
если $a \in (2; \frac{5}{2}):$ 4 решения;
если $a = \dfrac{5}{2}\ :$ 3 решения;
если $a > \dfrac{5}{2}\ :$ 2 решения.

3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Задача 3.1. В зависимости от значений параметра a определите число корней уравнения $x^4 + (1-2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$.

Решение.

Уравнение является рациональным уравнением 4 степени, следовательно, может иметь не более 4 корней. Полагая $y = x^2$, перепишем уравнение в виде $y^2 + (1-2a)y + (a^2-1) = 0$.

Исходное уравнение имеет 4 корня, если последнее квадратное уравнение имеет 2 различных положительных корня. Достаточные условия этого записаны в виде системы (т.к. ветви параболы направлены вверх):

$$\begin{cases} D = 5 - 4a > 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a-1) > 0 \\ f(0) = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (1; \tfrac{5}{4}).$$

Если один из корней $y_1 = 0$, а второй корень $y_2 > 0$, то исходное уравнение будет иметь 3 корня. Запишем условия этого случая:

$$\begin{cases} D = 5 - 4a > 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a-1) > 0 \\ f(0) = a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Далее, исходное уравнение по переменной x будет иметь 2 корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_2}$, если один из корней $y_1 < 0$, а второй $y_2 > 0$. Условием этого случая является неравенство $f(0) < 0$ или $a \in (-1; 1)$. Кроме того, если $D = 0$ $(a = \frac{5}{4})$, то исходное уравнение также имеет 2 корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $y_1 = 0$, $y_2 < 0$. Тогда исходное уравнение по переменной x будет иметь единственный корень $x = 0$. Достаточным условием этого является система

$$\begin{cases} f(0) = a^2 - 1 = 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Наконец, исходное уравнение не будет иметь решений в двух случаях: или когда оба корня отрицательны $y_1 < 0$, $y_2 < 0$; или когда корней у квадратного уравнения вообще нет, т.е. $D < 0$. Достаточные условия отсутствия корней определяет совокупность

$$\left[\begin{array}{l} D = 5 - 4a < 0 \\ \begin{cases} D = 5 - 4a > 0 \\ y_{\text{в}} = \dfrac{1}{2}(2a-1) < 0 \\ f(0) = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \; a \in (-\infty; -1) \cup (\tfrac{5}{4}; +\infty).$$

Ответ:

Если	$1 < a < \dfrac{5}{4}$	: 4 корня;
если	$a = 1$	: 3 корня;
если	$-1 < a < 1, \; a = \dfrac{5}{4}$	: 2 корня;
если	$a = -1$	: 1 корень;
если	$a < -1, \; a > \dfrac{5}{4}$	: нет корней.

Задача 3.2. При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)^2\big(a(x-a)^2 - a - 1\big) + 1 = 0$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

Решение.

Сделаем в исходном уравнении подстановку $y = (x-a)^2$, тогда оно примет вид: $ay^2 - (a+1)y + 1 = 0$.

При $a = 0$ получаем, что $y = 1$, откуда $x = \pm 1$. В этом случае требование задачи не выполняется.

Пусть теперь $a \neq 0$. В этом случае корнями последнего уравнения являются $y_1 = 1$; $y_2 = \dfrac{1}{a}$.

При $a < 0$ $y_2 < 0$ и исходное уравнение имеет корни $x_1 = a + 1$; $x_2 = a - 1 < 0$. Требования задачи не выполняются.

При $a > 0$ корни исходного уравнения таковы: $x_1 = a + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$; $x_2 = a + 1$; $x_3 = a - 1$; $x_4 = a - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

При $0 < a < 1$ два из этих корней положительны, а два отрицательны, т.е. требование задачи не выполняется.

При $a = 1$ $x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = x_4 = 0$, т.е. число положительных корней больше, чем отрицательных.

Наконец, при $a > 1$ все четыре корня положительны.

Ответ: $a \geqslant 1$.

Задача 3.3. В зависимости от значений параметра a найдите наименьший корень уравнения $x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2x - 2a(a+1)^2 = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $(x+2a)(x-a-1)(x+a+1) = 0$. Корнями этого уравнения являются $x_1 = -a-1$; $x_2 = a+1$; $x_3 = -2a$.

Найдем те значения параметра a, при которых наименьшим корнем будет x_1.

Запишем систему
$$\begin{cases} -a-1<a+1 \\ -a-1<-2a \end{cases} \Rightarrow \quad -1<a<1.$$
Если предположить, что наименьшим является корень x_2, то придем к системе
$$\begin{cases} a+1<-a-1 \\ a+1<-2a \end{cases} \Rightarrow \quad a<-1.$$
В последнем случае, когда x_3 является наименьшим корнем уравнения, необходимо решить систему
$$\begin{cases} -2a<a+1 \\ -2a<-a-1 \end{cases} \Rightarrow \quad a>1.$$
При $a=-1$ корни x_2 и x_1 совпадают, а при $a=1$ корни $x_1=x_3$.

Ответ: Если $a \leqslant -1: \ x=a+1;$
если $-1<a<-1: \ x=-a-1;$
если $a \geqslant 1 \ : \ x=-2a.$

Задача 3.4. (СГАУ) Для каждого значения параметра a решите неравенство $$\frac{x^2-2x+3^{|a|}}{x^2-4}<0.$$

Решение.

Дискриминант числителя $D=4(1-3^{|a|}) \leqslant 0$ неотрицателен для любых значений параметра a.

Если $a=0$, то $D=0$ и неравенство перепишется в виде $\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)(x+2)}<0.$ Решая последнее неравенство методом интервалов, получим $x \in (-2;1) \cup (1;2)$. Если $a \neq 0$, то $|a|>0$, $3^{|a|}>1$ и дискриминант $D<0$. Ветви параболы в числителе направлены вверх, следовательно $x^2-2x+3^{|a|}>0$ для любых значений x. В этом случае решением исходного неравенства является интервал $x \in (-2;2)$.

Ответ: Если $a \neq 0: \ x \in (-2;2);$
если $a=0: \ x \in (-2;1) \cup (1;2).$

Задача 3.5. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x+3a-5}{ax-1}>0$ справедливо для всех x таких, что $x \in [1;4]$?

Решение.

Исходное неравенство равносильно неравенству
$(x+3a-5)(ax-1)>0$ или $ax^2+x(3a^2-5a-1)-3a+5>0.$

Если $a = 0$, то решением этого неравенства являются все $x < 5$, т.е. требования задачи выполняются.

При $a \neq 0$ неравенство имеет 2 корня $x_1 = 5 - 3a$ и $x_2 = \dfrac{1}{a}$. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, поэтому условия задачи будут выполнены, если оба корня квадратного трехчлена будут либо меньше 1, либо больше 4. Запишем эти уравнения в виде совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5 - 3a < 1 \\ \dfrac{1}{a} < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 5 - 3a > 4 \\ \dfrac{1}{a} > 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая эти системы при условии $a > 0$, получим, что $a \in (0; \frac{1}{4}) \cup (\frac{4}{3}; \infty)$.

При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, из геометрической интерпретации требований задачи получим систему:

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(4) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3a^2 - 7a - 4 > 0 \\ 12a^2 - 7a + 1 > 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

Решением этой системы являются все $a < 0$. Объединяя полученные решения, получим ответ.

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$.

Задача 3.6. При каких значениях параметра a неравенство $x + \dfrac{7a^2 - a - 2}{x - a} < -7a$ не имеет решений, больших 1?

Решение.

Приведем неравенство к виду $\dfrac{x^2 + 6ax - a - 2}{x - a} < 0$. Так как дискриминант числителя $\dfrac{D}{4} = 9a^2 + a + 2 > 0$ для любого a, запишем равносильное неравенство $\dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{x - a} < 0$, где $x_1 = -3a - \sqrt{9a^2 + a + 2}$; $x_2 = -3a + \sqrt{9a^2 + a + 2}$. Решая последнее неравенство методом интервалов, приходим к выводу, что требование задачи будет выполняться только при таком расположении точек x_1, x_2, a на оси абсцисс, при котором совместна система неравенств $\begin{cases} x_2 \leqslant 1, \\ a \leqslant 1. \end{cases}$

Решая эту систему, получим ответ.

Ответ: $a \in [\frac{1}{5}; 1]$.

Задача 3.7. (СГАУ) При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$$
имеет ровно одно решение? Найдите это решение.

Решение.

Поскольку $x = -1$ не является решением системы (проверка подстановкой), полагаем $x \neq -1$. Тогда из второго уравнения системы получаем $y = \dfrac{-x-2}{x+1}$. Подставляя выражение для y в первое уравнение системы, получим квадратное уравнение на переменную x: $x^2(a+1) + x(a+2) + 2 - a = 0$.

Последнее уравнение будет иметь единственное решение в том случае, когда оно является линейным, т.е. $a + 1 = 0$. При $a = -1$ решением системы являются: $x = -3$; $y = -\dfrac{1}{2}$. Квадратное уравнение также будет иметь единственное решение, когда его дискриминант равен нулю, т.е. $D = (a+2)^2 - 4(a+1)(2-a) = 0$. Это будет при $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. При этих значениях параметра a находим решения системы: $x = -\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2 \pm \sqrt{5}}$; $y = -3 \pm \sqrt{5}$.

Наконец, исходная система будет иметь ровно одно решение, когда квадратное уравнение на переменную x хотя и имеет два решения, но одно из них является “запрещенным” для системы, т.е. $x = -1$. Подставляя $x = -1$ в квадратное уравнение, найдем, что такой корень будет при $a = 1$. Второй корень при этом значении a будет равен $x = -\dfrac{1}{2}$ и соответственно $y = -3$.

Ответ:
$$\begin{array}{lll} \text{Если } a = -1 & : & x = -3; \quad y = -\dfrac{1}{2}; \\ \text{если } a = 1 & : & x = -\dfrac{1}{2}; \quad y = -3; \\ \text{если } a = \dfrac{2}{\sqrt{5}} & : & x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}; \quad y = -3 - \sqrt{5}; \\ \text{если } a = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & : & x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}; \quad y = -3 + \sqrt{5}. \end{array}$$

Задача 3.8. При каких значениях параметра a решение системы
$\begin{cases} x + y = 2(a+1) \\ xy = a^2 + 3a - 1 \end{cases}$ удовлетворяет условиям $|x| < 1$; $|y| > 1$?

Решение.

Рассмотрим уравнение $t^2 - 2(a+1)t + a^2 + 3a - 1 = 0$. Тогда по теореме Виета пары корней этого уравнения t_1; t_2 будут являться решениями системы. При таком подходе задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра a один из корней квадратного трехчлена $f(t)=t^2-2(a+1)t+a^2+3a-1$ принадлежит интервалу $(-1;1)$, а второй корень расположен на числовой оси вне этого интервала?

Из геометрической интерпретации решение последней задачи сводится к решению неравенства

$$f(-1)\cdot f(1)<0 \quad \text{или} \quad (a^2+5a+2)(a^2+a-2)<0.$$

Решая последнее методом интервалов получим ответ.

Ответ: $a\in\left(\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2};-2\right)\cup\left(\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2};1\right)$

Задача 3.9. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ x^2+y^2+a^2=2x+2ay \end{cases} \qquad \text{имеет решения?}$$

Решение. Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2=y+1 \\ (x-1)^2+(y-a)^2=1. \end{cases}$$

Отсюда приходим к системе

$$\begin{cases} (y-a)^2+y+1=1 \\ y+1\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2+(1-2a)y+a^2=0 \\ y\geqslant -1. \end{cases}$$

Из геометрического смысла квадратного трехчлена следует, что система будет иметь хотя бы одно решение, если совместна совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=1-4a\geqslant 0 \\ y_{\text{в}}=a-\dfrac{1}{2}>-1 \end{cases} \\ \begin{cases} D=1-4a\geqslant 0 \\ y_{\text{в}}=a-\dfrac{1}{2}\leqslant -1 \\ f(-1)=a^2+2a\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая системы неравенств, придем к совокупности $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{1}{4} \\ -2\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$ откуда получаем ответ.

Ответ: $-2\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

Задача 3.10. Найдите значения параметра a при которых уравнения $ax^3-x^2-x-a-1=0$ и $ax^2-x(a+1)=0$ имеют общий корень. Найдите этот корень.

Решение.

Вначале убедимся, что $a\neq 0$. Действительно, при $a=0$ уравнения примут вид $x^2-x-1=0$ и $x+1=0$. Очевидно, что общих корней в этом случае нет.

При $a \neq 0$ обозначим x_0 — общий корень уравнений, тогда числа x_0 и a будут решениями системы

$$\begin{cases} ax_0^3 - x_0^2 - x_0 - (a+1) = 0 \\ ax_0^2 - x_0(a+1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы является $x_0 = \dfrac{a+1}{a}$ при любом $a \neq 0$.

Ответ: При $a \neq 0:\quad x_0 = \dfrac{a+1}{a}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.11. В зависимости от значений параметра a определите количество корней уравнения $x^2 + x + \dfrac{9}{x^2+x+1} = a$.

Ответ:
$$\begin{array}{lll} \text{Если } a < 5 & : & \text{корней нет,} \\ \text{если } a = 5 & : & \text{2 корня,} \\ \text{если } 5 < a < \frac{47}{4} & : & \text{4 корня,} \\ \text{если } a = \frac{47}{4} & : & \text{3 корня,} \\ \text{если } a > \frac{47}{4}, & : & \text{2 корня.} \end{array}$$

При каких значениях параметра a уравнения имеют общий корень? Найдите этот корень.

Задача 3.12. $x^3 + ax + 1 = 0$ и $x^4 + ax^2 + 1 = 0$.

Ответ: $a = -2$; $x = 1$.

Задача 3.13. $(1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$

Ответ: $a = 0$; $x = \frac{2}{9}$.

Задача 3.14. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{a-1}{x+4} = \dfrac{2x+3}{x^2-x-20}$ имеет корень $x \leqslant 2$?

Ответ: $a \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{14}{9}\right) \cup \left(\frac{14}{9}; 3\right)$.

Задача 3.15. При каких значениях параметра a уравнение $x^5 + (a-4)x^3 + (a+3)^2 x = 0$ имеет 5 действительных корней? Определите все a, при которых эти корни образуют арифметическую прогрессию. Запишите эту прогрессию для целого значения a.

Ответ: $a \in \left[-10; -\frac{2}{3}\right]$; $a = -\frac{23}{3}$, $a = -1$;
$\div\ -2; -1; 0; 1; 2$ или $2; 1; 0; -1; -2$

Задача 3.16. При каком значении параметра a уравнение $x^3+3x^2-6x+a=0$ имеет 3 различных корня, образующих геометрическую прогрессию? Найдите эти корни.

Ответ: $a=-8: \quad x_1=-4,\ x_2=2,\ x_3=-1.$

Найдите решения неравенств в зависимости от параметра a.

Задача 3.17. $$\frac{x^2+4x}{3^{|a|}\cdot x^2-2x+1}>0.$$

Ответ: $a\neq 0: \quad x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty),$
$a=0: \quad x\in(-\infty;-4)\cup(0;1)\cup(1;+\infty).$

Задача 3.18. $$\frac{2ax+3}{5x-4a}<4.$$

Ответ: Если $a=10: \quad x<8,$
если $a<10: \quad x<\dfrac{4a}{5};\ x>\dfrac{16a+3}{20a-2a},$
если $a>10: \quad \dfrac{16a+3}{20a-2a}<x<\dfrac{4a}{5}.$

Задача 3.19. $$\frac{3ax+4}{3a+9}<\frac{x}{a+3}+\frac{3a-5}{3a-9}.$$

Ответ: Если $a=1;\ a=-3;\ a=3$: решений нет,
если $-3<a<1$: $x>\dfrac{a+1}{a-3},$
если $a<-3;\ 1<a<3;\ a>3$: $x<\dfrac{a+1}{a-3}.$

Задача 3.20. При каких значениях параметра a неравенство $2x^2-4a^2x-a^2+1>0$ выполняется при всех x таких, что $|x|\leqslant 1$?

Ответ: $|a|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

При каких значениях параметра a системы имеют решения?

Задача 3.21. $$\begin{cases} 3x+(a-1)y=a+1\\ (a+1)x+y=3. \end{cases}$$

Ответ: $a\neq -2.$

Задача 3.22. $$\begin{cases} y(ax-1)=2|x+1|+2xy\\ xy+1=x-y. \end{cases}$$

Ответ: $a<-5-4\sqrt{2};\quad a>0.$

Задача 3.23. $$\begin{cases} x^2-y+1=0\\ x^2-y^2+(a+1)x+(a-1)y+a=0. \end{cases}$$

Ответ: $a \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Задача 3.24. $\begin{cases} x = a + \sqrt{y} \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: $a \leqslant -3; \quad a \geqslant \dfrac{3}{4}$.

При каких значениях параметра a системы имеют ровно одно решение?

Задача 3.25. $\begin{cases} \sqrt{x} - y = a \\ y\sqrt{x} = 1 - a. \end{cases}$

Ответ: $a < 1; \quad a = 2$.

Задача 3.26. $\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0 \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: $a = \dfrac{11}{12}; \quad a = 1; \quad a = 3$.

Задача 3.27. $\begin{cases} y \geqslant x^2 + a \\ x \geqslant y^2 + a. \end{cases}$

Ответ: $a = \dfrac{1}{4}$.

Задача 3.28. $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 - a \leqslant 0 \\ x^2 - 2x + 6a - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $a = -1; \quad a = 0$.

Задача 3.29. (СГАУ) $\begin{cases} y - x - yx + 3 = 0 \\ a(x + y) = xy - 3. \end{cases}$ Найдите это решение.

Ответ: Если $a = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$: $x = 3 - \sqrt{6}; \quad y = -3 - \sqrt{6}$,

если $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$: $x = 3 + \sqrt{6}; \quad y = -3 + \sqrt{6}$,

если $a = -1$: $x = 3; \quad y = 0$,

если $a = 1$: $x = 0; \quad y = -3$.

В зависимости от параметра a решите системы неравенств.

Задача 3.30. $\begin{cases} ax > -1 \\ x + a > 0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{array}{lll} \text{Если} & a \leqslant -1: & \text{решений нет,} \\ \text{если} & -1 < a < 0: & -a < x < -\dfrac{1}{a}, \\ \text{если} & a = 0: & x > 0, \\ \text{если} & 0 < a \leqslant 1: & x > -a, \\ \text{если} & a > 1: & x > -\dfrac{1}{a}. \end{array}$

Задача 3.31. $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 - (a+3)x < 0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{array}{lll} \text{Если} & a < -3: & a+3 < x < 0, \\ \text{если} & a = -3: & \text{решений нет,} \\ \text{если} & -3 < a < -2: & 0 < x < a+3, \\ \text{если} & -2 \leqslant a \leqslant 0: & 0 < x < 1, \\ \text{если} & 0 < a < 1: & a < x < 1, \\ \text{если} & a = 1: & \text{решений нет,} \\ \text{если} & a > 1: & 1 < x < a. \end{array}$

Задача 3.32. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1 \\ (3a+14)x + (a+8)y = 5a^2 + 5 \end{cases}$ не имеет решений.

Ответ: $a = -6$.

Задача 3.33. При каких значениях параметра a, функция
$$y = \frac{1}{ax^2 + 4ax + 7}$$
определена для всех действительных значений x?

Ответ: $a \in \left[\,0; \frac{7}{4}\right)$.

Задача 3.34. При каких значениях параметра a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$\begin{cases} bx + y = ac^2 \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a \in (-\infty; -4\,] \cup [\,4; +\infty)$.

Задача 3.35. Множество M состоит из точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \leqslant y \\ 3x + y - (2a+4) \leqslant 0. \end{cases}$$
Определите, при каких значениях параметра a множество M содержит отрезок $[-2; -1]$ оси Ox.

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{2}; 1\,\right]$.

4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 4.1. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{a-x} = 2-x$.

Решение.

Рассмотрим 4 способа решения этой задачи, которые могут быть использованы при решении иных типов уравнений.

Способ 1. Запишем систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} a-x=(2-x)^2 \\ 2-x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-3x-a+4=0 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

Дискриминант первого уравнения системы $D=4a-7$, откуда следует, что при $a<\dfrac{7}{4}$ решений нет, а при $a=\dfrac{7}{4}$ исходное уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{3}{2}$.

Если $a>\dfrac{7}{4}$, то первое уравнение системы имеет два корня $x_1=\dfrac{3}{2}-\sqrt{a-\dfrac{7}{4}}$ и $x_2=\dfrac{3}{2}+\sqrt{a-\dfrac{7}{4}}$.

Очевидно, $x_1<x_2$, следовательно, для выполнения второго неравенства системы $x\leqslant 2$ для обоих корней достаточно совместности системы

$$\begin{cases} a>\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{3}{2}+\sqrt{a-\dfrac{7}{4}} \leqslant 2. \end{cases}$$

Решением последней системы является интервал $\dfrac{7}{4}<a\leqslant 2$, при котором исходное уравнение имеет 2 корня x_1 и x_2.

Наконец, исходное уравнение будет иметь только одно решение, если окажется, что $x_1\leqslant 2$, а $x_2>2$, т.е. совместна система

$$\begin{cases} a>\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{3}{2}-\sqrt{a-\dfrac{7}{4}} \leqslant 2 \\ \dfrac{3}{2}+\sqrt{a-\dfrac{7}{4}} > 2, \end{cases} \qquad \text{откуда } a>2.$$

Ответ: Если $a<\dfrac{7}{4}$: нет решений,

если $a=\dfrac{7}{4}$: одно решение $x=\dfrac{3}{2}$,

если $\dfrac{7}{4}<a\leqslant 2$: два решения $x_{1,2}=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{a-\dfrac{7}{4}}$,

если $a>2$: одно решение $x=\dfrac{3}{2}-\sqrt{a-\dfrac{7}{4}}$.

Способ 2. Рассмотрим систему, равносильную исходному уравнению
$$\begin{cases} x^2 - 3x - a + 4 = 0 \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Исходя из геометрической интерпретации квадратного трехчлена, получим, что система будет иметь 2 решения, если оба корня квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 3x - a + 4$ будут меньше, либо равны 2. Ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $x = \frac{3}{2} < 2$, поэтому достаточно выполнения условий:
$$\begin{cases} D = 4a - 7 > 0 \\ f(2) = 2 - a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a \in (\tfrac{7}{4}; 2].$$

При $D = 0$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{3}{2}$. Если же $f(2) < 0$, то требованиям $x \leqslant 2$ будет удовлетворять лишь один корень (рис. 13). Таким образом, при $a < 2$ останется только меньший корень $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$.

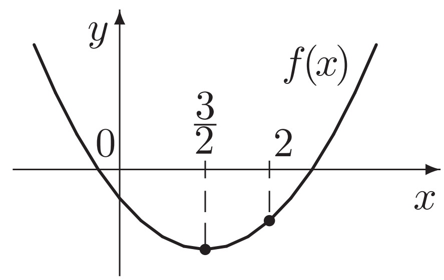


Рис. 13:

Способ 3. Рассмотрим графики функций $y_1 = \sqrt{a-x}$ и $y_2 = 2-x$, задаваемые соответственно левой и правой частями уравнения. График y_1 представляет собой верхнюю часть параболы с ветвями, направленными влево, и вершиной в точке $x = a$ $(x \leqslant a)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут являться решениями уравнения. Из рис. 14 следует, что при $a < \frac{7}{4}$ $(D < 0)$ графики не пересекаются.

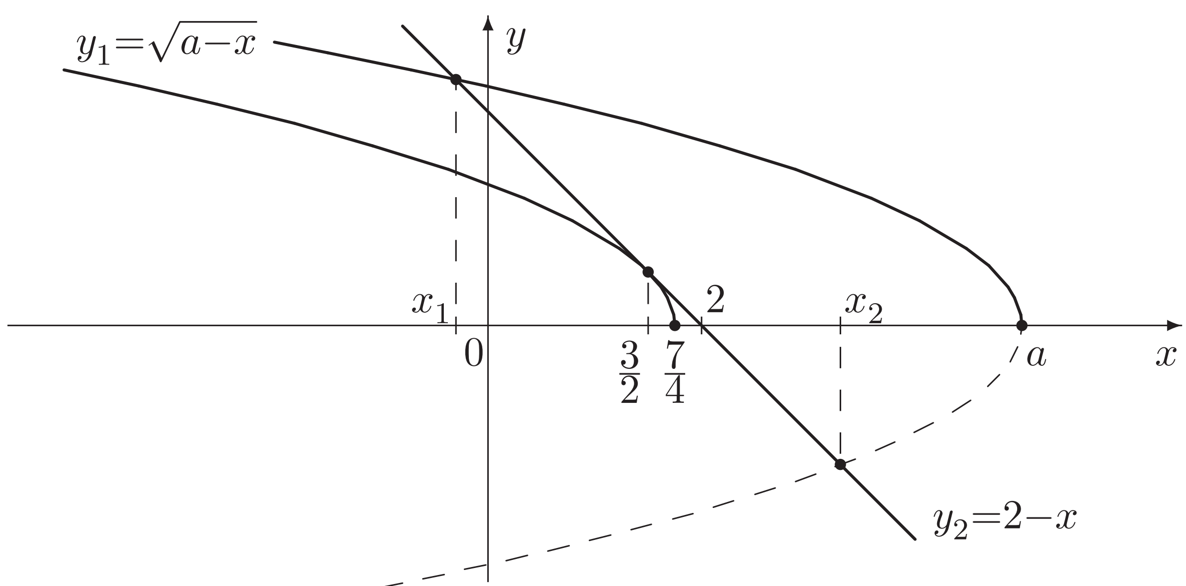


Рис. 14:

При $a > 2$ прямая y_2 пересекает полупараболу только в одной точке, соответствующей меньшему корню $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$.

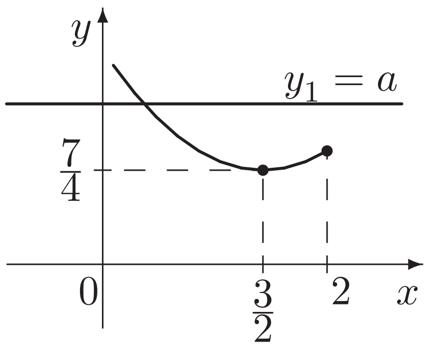


Рис. 15:

Способ 4. Перепишем исходное уравнение в виде: $\begin{cases} a = x^2 - 3x + 4 \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

Построим на одном чертеже графики функций $y_1 = a$ (прямая, параллельная оси Ox) и $y_2 = x^2 - 3x + 4$ (парабола) при условии $x \leqslant 2$. Передвигая на рис. 15 прямую $y_1 = a$, приходим к выводам, полученным другими способами.

Задача 4.2. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Решение.

Из вида уравнения следует, что $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Если при этих условиях обозначить $y = \sqrt{a + x}$, $y \geqslant 0$, то уравнение будет равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{a + x} = y, & y \geqslant 0 \\ \sqrt{a - y} = x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Возводя обе части уравнений системы в квадрат, получим равносильную систему
$$\begin{cases} a + x = y^2, & y \geqslant 0 \\ a - y = x^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$$
из которой следует уравнение $(x + y) = (y - x)(x + y)$.

Если $x + y = 0$, то с учетом неравенств $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ получим $x = y = 0$, а следовательно, $a = 0$.

Если $x + y \neq 0$, то из последнего уравнения $y - x = 1$, а значит $\sqrt{a + x} = x + 1$. Возводя обе части в квадрат, получим уравнение $x^2 + x + 1 - a = 0$, которое при $a \geqslant \frac{3}{4}$ имеет корни $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$. Очевидно, что первый корень не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, а второй корень x_2 будет неотрицателен при $a \geqslant 1$.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$: решений нет,
если $a = 0$: $x = 0$,
если $a \in [1; +\infty)$: $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$.

Задача 4.3. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = x$.

Решение.

Из вида уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Если $a = 0$, то $x = 0$. Справедливо и обратное. Предположим, что $x > 0$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $2\sqrt{a^2 - x^2} = x^2 - 2a$, которое может быть справедливым только при условиях $0 < x \leqslant a$, $x^2 \geqslant 2a$. Повторное возведение в квадрат и сокращение с учетом $x > 0$ приводит к значению $x = 2\sqrt{a-1}$, $a > 1$. Очевидно, что условие $0 < x \leqslant a$ выполняется при всех $a > 1$, а вот условие $x^2 \geqslant 2a$ возможно только при $a \geqslant 2$.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$: решений нет,
если $a = 0$: $x = 0$,
если $a \in [2; +\infty)$: $x = 2\sqrt{a-1}$.

Задача 4.4. В зависимости от значений параметра a решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{a+x} - \sqrt{y+b} = 1 \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1. \end{cases}$$

Решение.

Если возвести обе части обоих уравнений системы в квадрат, то получим систему
$$\begin{cases} x + a + y + b - 1 = 2\sqrt{(a+x)(y+b)} \\ y + a + x + b - 1 = 2\sqrt{(y+a)(x+b)}, \end{cases}$$
из которой следует, что
$$(x+a)(y+b) = (x+b)(y+a) \quad \text{или} \quad (a-b)(x-y) = 0.$$

Рассмотрим случай $a = b$. В этом случае исходная система имеет вид
$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+a} = 1 \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+a} = 1. \end{cases}$$
Очевидно, что эта система несовместна.

Пусть теперь $x = y$. В этом случае вместо системы имеем одно уравнение $\sqrt{x+a} = \sqrt{x+b} + 1$. Обе части этого уравнения неотрицательны, поэтому при возведении в квадрат получим равносильное уравнение $\sqrt{x+b} = \dfrac{a-b-1}{2}$. Последнее уравнение может выполняться только при $a - b \geqslant 1$, и в этом случае $x = \dfrac{(a-b)^2 - 2(a+b) + 1}{4}$.

Ответ: Если $a - b < 1$: решений нет,
если $a - b \geqslant 1$: $x = y = \dfrac{(a-b)^2 - 2(a+b) + 1}{4}$.

Задача 4.5. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $a \cdot \sqrt[4]{1+x} + \dfrac{a}{x} \cdot \sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{x}$.

Решение.

Областью допустимых значений переменной являются все $x > 0$. Если умножить обе части уравнения на x, то придем к уравнению $a(1+x)^{5/4} = x^{5/4}$, из вида которого с учетом ОДЗ следует, что $a > 0$. А тогда уравнение равносильно следующему: $(1+\frac{1}{x})^{5/4} = \frac{1}{a}$, откуда $x = \dfrac{a^{4/5}}{1-a^{4/5}}$. Учитывая теперь, что $x > 0$ и $a > 0$, приходим к рассмотрению неравенства $1 - a^{4/5} > 0$, решением которого являются все $0 < a < 1$.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$: решений нет,

если $a \in (0; 1)$: $x = \dfrac{a^{4/5}}{1-a^{4/5}}$.

Задача 4.6. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = a$.

Решение.

Сделав замену $y = \sqrt[3]{1+x}$, перепишем уравнение в виде

$$y + \sqrt[3]{2-y^3} = a.$$

Перенесем переменную y в правую часть и возведем в куб. Получим равносильное уравнение $3ay^2 - 3a^2y + a^3 - 2 = 0$. Это квадратное уравнение при $0 < a \leqslant 2$ имеет корни $y_{1,2} = \dfrac{3a^2 \pm \sqrt{3a(8-a^3)}}{6a}$. Выполняя обратную замену, получим ответ.

Ответ: Если $a \leqslant 0$, $a > 2$: решений нет,

если $0 < a \leqslant 2$: $x_{1,2} = \left[\dfrac{3a^2 \pm \sqrt{3a(8-a^3)}}{6a}\right]^3 - 1$.

Задача 4.7. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите неравенство $x + \sqrt{6x} \geqslant a - 3 + \sqrt{a + 5x - 3}$.

Решение.

Область допустимых значений переменной определяется системой

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant \dfrac{3-a}{5}. \end{cases}$$

Прибавим к обеим частям неравенства по $5x$ и перенесем все слагаемые в левую часть неравенства:

$$6x - (a + 5x - 3) + \sqrt{6x} - \sqrt{a + 5x - 3} \geqslant 0.$$

Разложим первые два слагаемых на разность квадратов и вынесем за скобки:

$$\left(\sqrt{6x} - \sqrt{a+5x-3}\right)\left(\sqrt{6x} + \sqrt{a+5x-3} + 1\right) \geqslant 0.$$

Вторая скобка может принимать только положительные значения, следовательно, последнее неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{6x} - \sqrt{a+5x-3} \geqslant 0.$$

Решением последнего являются все $x \geqslant a-3$.

Рассмотрим теперь три случая пересечения этого решения с ОДЗ. Если $a=3$, то решением являются все $x \geqslant 0$.

Если $a>3$, то из рис. 16 следует, что решением является интервал $x \geqslant a-3$.

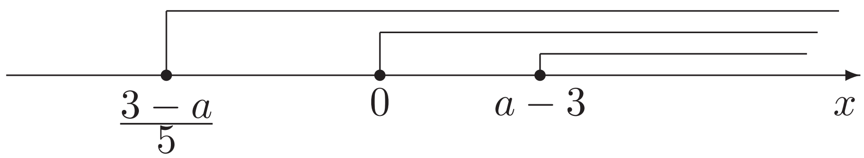


Рис. 16:

Аналогично, при $a<3$ найдем решение $x \geqslant \dfrac{3-a}{5}$.

Ответ: Если $a<3$: $x \geqslant \dfrac{3-a}{5}$,
если $a=3$: $x \geqslant 0$,
если $a>3$: $x \geqslant a-3$.

Задача 4.8. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

Решение.

При $a \leqslant 0$ неравенство решений не имеет. Если $a>0$, то область допустимых значений переменной задается неравенством $|x| \leqslant a$. Если при таких x возвести обе неотрицательные части неравенства в квадрат, то получим неравенство $2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$.

Рассмотрим три случая.

Если $a^2-2a<0$, т.е. $0<a<2$, то последнее неравенство справедливо при всех $|x| \leqslant a$.

Если $a^2-2a=0$, т.е. $a=2$, то неравенство примет вид $2\sqrt{4-x^2}>0$, откуда $|x|<2$.

Если $a^2-2a>0$, т.е. $a>2$, то возводя обе неотрицательные части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство $4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2$, откуда $x^2<\dfrac{a^3(4-a)}{4}$.

При $a \geqslant 4$ это неравенство решений не имеет.

Если $2<a<4$, то $|x|<\frac{1}{2}\left(a\sqrt{a(4-a)}\right)$. Нетрудно убедиться, что полученные значения удовлетворяют условию $|x| \leqslant a$.

Ответ:

$$\begin{array}{lll} \text{Если} & a \leqslant 0 \text{ и } a \geqslant 4: & \text{решений нет,} \\ \text{если} & 0 < a < 2 \quad : & -a \leqslant x \leqslant a, \\ \text{если} & a = 2 \quad : & -2 < x < 2, \\ \text{если} & 2 < a < 4 \quad : & -\dfrac{a\sqrt{a(4-a)}}{2} < x < \dfrac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}. \end{array}$$

Задача 4.9. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

Решение.

Если $a < 0$, то из вида правой части неравенства следует, что $x \leqslant 0$. Но тогда и левая часть будет отрицательна, что невозможно.

Если $a = 0$, то рассматриваемому неравенству удовлетворяют все $x > 0$.

Если $a > 0$, тогда $x \geqslant 0$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому возведение в квадрат влечет равносильное неравенство $(x + 4a)^2 > 25ax$ или $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$. Разложим левую часть на множители: $(x-a)(x-16a) > 0$, откуда с учетом $a > 0$, $x \geqslant 0$ получим, что решениями являются все $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$.

Ответ:

$$\begin{array}{lll} \text{Если} & a < 0: & \text{решений нет,} \\ \text{если} & a = 0: & x > 0, \\ \text{если} & a > 0: & x \in [0; a) \cup (16a; +\infty). \end{array}$$

Задача 4.10. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $\sqrt{2ax - x^2} \geqslant a - x$.

Решение.

Заметим, что при $a = 0$ решением неравенства будет $x = 0$.

При $a \neq 0$ рассмотрим графики функций

$$y_1 = \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} \qquad \text{и} \qquad y_2 = a - x.$$

Рассматривая задачу с геометрической точки зрения, получим на координатной плоскости семейство полуокружностей y_1 радиуса $|a|$ с центром в точке $(a; 0)$ и семейство прямых $y_2 = a - x$, проходящих через точку $(a; 0)$ (рис. 17).

Решениями исходного неравенства будут являться абсциссы тех точек полуокружностей, которые лежат выше прямой. Таким образом, для решения задачи необходимо найти точку пересечения графиков y_1 и y_2, т.е. решить уравнение $\sqrt{2ax - x^2} = a - x$. При $a > 0$ это $x = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а при $a < 0$ значение $x = a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Из рис. 17 можно записать

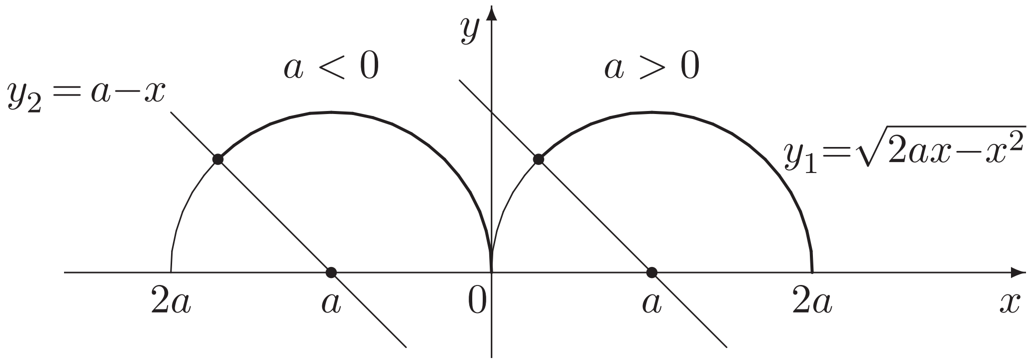


Рис. 17:

Ответ: Если $a<0$: $a\Big(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) \leqslant x \leqslant 0$,
если $a=0$: $x=0$,
если $a>0$: $a\Big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) \leqslant x \leqslant 2a$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.11. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a}=x+1$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: Если $a=\dfrac{3}{4}$: $x=-\dfrac{1}{2}$,
если $a>1$: $x=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{a-\dfrac{3}{4}}$.

Задача 4.12. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{4x+a}=2x-1$.

Ответ: Если $a<-3$: решений нет,
если $a=-3$: $x=1$,
если $-3<a\leqslant -2$: $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{a+3}}{2}$,
если $a>-2$: $x=\dfrac{2+\sqrt{a+3}}{2}$.

В зависимости от значений параметра a решите уравнения.

Задача 4.13. $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$.

Ответ: Если $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$: решений нет,
если $a=0$: $x=0$,
если $a\in[1;+\infty)$: $x=\dfrac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$.

Задача 4.14. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}=a.$

Ответ: $$\begin{array}{lll} \text{Если} & a\in(-\infty;0): & \text{решений нет,}\\ \text{если} & a=0: & x=0,\\ \text{если} & a\in(0;1): & \text{решений нет,}\\ \text{если} & a\in[1;+\infty): & x=\dfrac{1}{4}(a-1)^2. \end{array}$$

Задача 4.15. $\sqrt{x}-\sqrt{a-x}=2.$

Ответ: $$\begin{array}{lll} \text{Если} & a<2: & \text{решений нет,}\\ \text{если} & a\geqslant 2: & x=\frac{a}{2}+\sqrt{a-1}. \end{array}$$

Задача 4.16. $\sqrt{x+1}-\sqrt{a-x}=1.$

Ответ: $$\begin{array}{lll} \text{Если} & a<0: & \text{решений нет,}\\ \text{если} & a\geqslant 0: & x=\dfrac{a-1+\sqrt{2a+1}}{2}. \end{array}$$

Задача 4.17. $\sqrt[3]{x+a+63}-\sqrt[3]{x+a-1}=4.$

Ответ: $x_1=-63-a,\quad x_2=1-a$ при любых a.

Задача 4.18. $\sqrt{2x+a}+\sqrt{x-a}=2.$

Ответ: $$\begin{array}{lrl} \text{Если} & a<\dfrac{4}{3}: & x=12-2a+4\sqrt{8-3a},\\ \text{если} & \dfrac{4}{3}\leqslant a<\dfrac{8}{3}: & x_{1,2}=12-2a\pm4\sqrt{8-3a},\\ \text{если} & a=\dfrac{8}{3}: & x=\dfrac{20}{3},\\ \text{если} & a>\dfrac{8}{3}: & \text{решений нет.} \end{array}$$

Задача 4.19. $\dfrac{a+5}{\sqrt{x+9}}=1.$

Ответ: $$\begin{array}{lll} \text{Если} & a\leqslant -5: & \text{решений нет,}\\ \text{если} & a>-5: & x=(a+2)(a+8). \end{array}$$

Задача 4.20. $a-x=\sqrt{x^2-1}.$

Ответ: $$\begin{array}{lrl} \text{Если} & a<-1: & \text{решений нет,}\\ \text{если} & -1\leqslant a<0: & x=\dfrac{a^2+1}{2a},\\ \text{если} & 0\leqslant a<1: & \text{решений нет,}\\ \text{если} & a\geqslant 1: & x=\dfrac{a^2+1}{2a}. \end{array}$$

Задача 4.21. $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}.$

Ответ: Если $a < 0$: решений нет,
если $a \geqslant 0$: $x = \dfrac{3a}{4}$.

Задача 4.22. $\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{b+x}} + \sqrt[4]{\dfrac{b+x}{a-x}} = 2.$

Ответ: Если $a + b = 0$: решений нет,
если $a + b \neq 0$: $x = \dfrac{a-b}{2}$.

Для каждого значения параметра a решите неравенства:

Задача 4.23. $\sqrt{5x^2 + a^2} \geqslant -3x.$

Ответ: $|x| \geqslant -\dfrac{|a|}{2}$.

Задача 4.24. $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0.$

Ответ: Если $a = 0$: решений нет,
если $a \neq 0$: $-\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leqslant |a|$.

Задача 4.25. $2\sqrt{x+a} > x + 1.$

Ответ: Если $a \leqslant 0$: решений нет,
если $0 < a \leqslant 1$: $1 - 2\sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a}$,
если $a > 1$: $-a \leqslant x < 1 + 2\sqrt{a}$.

Задача 4.26. $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 2x + a.$

Ответ: Если $a < -2$: $|x| \leqslant 1$,
если $|a| \leqslant 2$: $-1 \leqslant x \leqslant \frac{-2a+\sqrt{5-a^2}}{5}$,
если $2 < a \leqslant \sqrt{5}$: $\frac{-2a-\sqrt{5-a^2}}{5} \leqslant x \leqslant \frac{-2a+\sqrt{5-a^2}}{5}$,
если $a > \sqrt{5}$: решений нет.

Задача 4.27. (СГАУ) $x + \sqrt{10x} \geqslant a - 4 + \sqrt{a + 9x - 4}.$

Ответ: Если $a < 4$: $x \geqslant \dfrac{4-a}{9}$,
если $a = 4$: $x \geqslant 0$,
если $a > 4$: $x \geqslant a - 4$.

Задача 4.28. (СГАУ) $x + \sqrt{8x} \geqslant 5 - a + \sqrt{5 + 7x - a}.$

Ответ: Если $a < 5$: $x \geqslant 5 - a$,
если $a = 5$: $x \geqslant 0$,
если $a > 5$: $x \geqslant \dfrac{a-5}{7}$.

5. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 5.1. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите неравенство $a^{x+2} - 8 \cdot a^{x-1} - \frac{4}{a} > a + 2.$

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются все $a > 0$.

Преобразуем неравенство, используя свойства показательной функции: $a^x \left(a^2 - \frac{8}{a}\right) > a + \frac{4}{a} + 2;$ $a^x \cdot \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a} > \frac{a^2+2a+4}{a}.$
Так как $a > 0$ и квадратный трехчлен $a^2+2a+4 > 0$ при всех значениях параметра a, то после сокращения получаем неравенство: $a^x \cdot (a-2) > 1.$

Рассмотрим два случая:

1) $a > 2;$ $a^x > \frac{1}{a-2}.$ Показательная функция с основанием $a > 2$ монотонно возрастает, поэтому получаем $x > -\log_a(a-2).$
2) Подстановкой убеждаемся, что при $a = 2$ и $a = 1$ решений нет.

Ответ: Если $a \leqslant 2:$ решений нет,
если $a > 2:$ $x > -\log_a(a-2).$

Задача 5.2. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите неравенство $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0.$

Решение.

После замены $3^x = t > 0$ получаем квадратное неравенство $9t^2 + 8at - a^2 < 0,$ корнями которого являются числа $t_1 = -a;$ $t_2 = \frac{a}{9}.$ Рассмотрим случаи:

1) если $a > 0,$ то $t_1 < 0 < t_2$ и решением квадратного неравенства является интервал $-a < t < \frac{a}{9}.$ С учетом $t > 0$ получаем неравенство: $3^x < \frac{a}{9},$ откуда $x < \log_3 a - 2;$
2) если $a = 0,$ то после подстановки в исходное неравенство получаем $9^{x+1} < 0,$ что невозможно;
3) если $a < 0,$ то $t_2 < 0 < t_1$ и решением квадратного неравенства является интервал $\frac{a}{9} < t < -a.$ С учетом $t = 3^x > 0$ получаем неравенство: $3^x < -a,$ откуда $x < \log_3(-a).$

Ответ: Если $a < 0:$ $x < \log_3(-a),$
если $a = 0:$ решений нет,
если $a > 0:$ $x > \log_3 a - 2.$

Задача 5.3. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите неравенство $4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} \geqslant a^2 + 3a.$

Решение.

Выполняя замену $t = 2^{x+1}$, получаем квадратное неравенство $t^2 - 3t - (a^2 + 3a) \geqslant 0$, корнями которого являются числа $t_1 = -a$; $t_2 = a + 3$. В отличие от задачи 5.2, в данном неравенстве придется рассмотреть большее число случаев. Изобразим их графически на рис. 18, отметив точки, соответствующие уравнениям $t_1 = -a = 0$; $t_2 = a + 3 = 0$ и $D = (2a + 3)^2 = 0$.

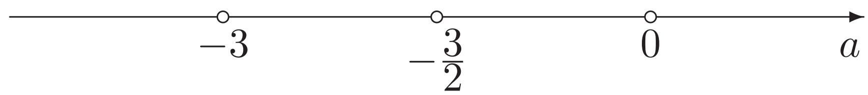


Рис. 18:

1) При $a \geqslant 0$ $t_1 \leqslant 0 < t_2$, решением квадратного неравенства является совокупность $\left[\begin{array}{l} 2^{x+1} < -a \\ 2^{x+1} > a + 3. \end{array}\right.$

   Очевидно, что первое неравенство совокупности не имеет решений, а решением второго являются все $x > \log_2(a + 3) - 1$.

2) При $-\dfrac{3}{2} < a < 0$ корни квадратного неравенства удовлетворяют условию $0 < t_1 < t_2$ и решением исходного неравенства является совокупность $\left[\begin{array}{l} x < \log_2(-a) - 1, \\ x > \log_2(a + 3) - 1. \end{array}\right.$

3) При $a = -\dfrac{3}{2}$ получаем, что $t_1 = t_2 = \dfrac{3}{2}$, решением исходного неравенства является все $x \in R$.

4) При $-3 < a < -\dfrac{3}{2}$ корни квадратного неравенства удовлетворяют условию $0 < t_2 < t_1$ и решением исходного неравенства является совокупность $\left[\begin{array}{l} x < \log_2(a + 3) - 1, \\ x > \log_2(-a) - 1. \end{array}\right.$

5) При $a \leqslant -3$ получаем, что $t_2 \leqslant 0 < t_1$ и аналогично случаю 1 получаем решение $x > \log_2(-a) - 1$.

Ответ:
$$\begin{array}{rl}
a \leqslant -3: & x \in (\log_2(-a) - 1; +\infty), \\
-3 < a < -\dfrac{3}{2}: & x \in (-\infty; \log_2(a+3) - 1) \cup (\log_2(-a) - 1; +\infty), \\
a = -\dfrac{3}{2}: & x \in R, \\
-\dfrac{3}{2} < a < 0 \quad : & x \in (-\infty; \log_2(-a) - 1) \cup (\log_2(a+3) - 1; +\infty), \\
a \geqslant 0 \quad : & x \in (\log_2(a+3) - 1; +\infty).
\end{array}$$

Задача 5.4. (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра a неравенство $x\,(x + \sqrt{4 - \log_a 6}\,) \geqslant \log_{\frac{1}{6}} 36a$ выполняется при любых действительных значениях x?

Решение.

Допустимые значения параметра a определяются системой $\begin{cases} 4-\log_a 6 \geqslant 0 \\ a>0;\ a\neq 1, \end{cases}$ решением которой являются все $a\in(0;1)\cup[\sqrt[4]{6};+\infty)$.

Исходное неравенство является квадратным относительно переменной x:
$$x^2+\sqrt{4-\log_a 6}\cdot x+(\log_6 a+2)\geqslant 0.$$

График квадратного трехчлена, ветви которого направлены вверх, неотрицателен при выполнении условия $D\leqslant 0$, что приводит к неравенству
$$D=\left(4-\frac{1}{\log_6 a}\right)-4(\log_6 a+2)\leqslant 0.$$

Заменяя $\log_6 a=t$, после преобразований получим рациональное неравенство $\dfrac{(2t+1)^2}{t}\geqslant 0$, решением которого является интервал $t>0$ и одна точка $t=-\frac{1}{2}$. Выполняя обратную замену, получаем $a>1$ и $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, что с учетом ОДЗ дает

Ответ: $a\in[\sqrt[4]{6};+\infty)$ и $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 5.5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $2\log_4(2x^2-x+2a-4a^2)+\log_{0,5}(x^2+ax-2a^2)=0$ больше 1?

Решение.

На основании свойств логарифмов исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2(2x^2-x+2a-4a^2)=\log_2(x^2+ax-2a^2)$, которое, в свою очередь, равносильно системе
$$\begin{cases} x^2-(a+1)\,x+2a(1-a)=0 \\ (x+2a)(x-a)>0. \end{cases}$$

Уравнение записанной системы имеет корни $x_1=1-a$ и $x_2=2a$.

Подставляя поочередно полученные значения x в неравенство системы, получим систему $\begin{cases} (a+1)(2a-1)<0 \\ 4a^2>0, \end{cases}$

из которой находим, что $a\in(-1;0)\cup(0;\frac{1}{2})$.

Учитывая теперь, что $x_1^2+x_2^2=5a^2-2a+1$, из неравенства $5a^2-2a+1>1$ получаем значения $a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$.

Ответ: $a\in(-1;0)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$.

Задача 5.6. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение

$$\Big((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a\Big)\cdot\lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0$$
имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не больше -1?

Решение.

Допустимые значения параметра a определяются системой $\begin{cases} 22a-4a^2-24\geqslant 0\\ 36a-9a^2>0\\ a>0,\end{cases}$ решением которой являются все $a\in\left[\frac{3}{2};4\right)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0$, откуда $a_1=\frac{5}{3}$; $a_2=\frac{7}{3}$. При этих значениях параметра a любое значение x удовлетворяет исходному уравнению, и, значит, последнее всегда имеет корни, о которых идет речь в задаче.

Пусть теперь первая скобка исходного уравнения равна нулю, что равносильно равенству
$$f(x)=(-2\lg a)\cdot x^2-2(\lg a-\sqrt{22a-4a^2-24})\cdot x+a\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}=0.$$

Из ОДЗ $a\in\left[\frac{3}{2};4\right)$ следует, что ветви квадратного трехчлена направлены вниз, поэтому требования задачи будут выполнены только при условии $\begin{cases} f(0)=a\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}\geqslant 0\\ f(-1)=(a-2)\cdot\sqrt{22a-4a^2-24}\geqslant 0,\end{cases}$

откуда получаем с учетом ОДЗ $a\in[\,2;4\,)\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $a=\frac{5}{3}$; $a\in[\,2;4\,)$.

Задача 5.7. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $1+\log_{\sqrt{5}}(2\lg a-x)\cdot\log_x\sqrt{5}=2\log_x\sqrt{5}$ имеет решения?

Решение.

Допустимые значения переменной определяются системой $\begin{cases} x>0;\quad x\neq 1\\ x<2\lg a.\end{cases}$

Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию $\sqrt{5}$:
$$\log_{\sqrt{5}}x+\log_{\sqrt{5}}(2\lg a-x)=2,$$
откуда получим квадратное уравнение $x^2-2\lg a\cdot x+5=0$.

Если его дискриминант $D=4\lg^2 a-20\geqslant 0$ или $|\lg a|\geqslant\sqrt{5}$, то исходное уравнение будет иметь решения.

С учетом ОДЗ $0<x<2\lg a$ получаем, что $\lg a>0$, и, следовательно, условиям задачи удовлетворяют все $\lg a\geqslant\sqrt{5}$ или $a\geqslant 10^{\sqrt{5}}$.

Ответ: $a\geqslant 10^{\sqrt{5}}$.

Задача 5.8. (СГАУ) При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{\frac{x}{a}-3}\cdot\log_3(x-x^2+21)>0$ имеет ровно два целых решения?

Решение.

Решениями неравенства являются все x, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \frac{x}{a}-3>0 \\ x-x^2+21>1. \end{cases}$

Последнему неравенству системы удовлетворяют $x\in(-4;5)$.

Рассмотрим 2 случая:

1) $a>0$, тогда из первого неравенства получим $x>3a$. По условию задачи останется только 2 целых решения, если $2\leqslant 3a<3$ или $\frac{2}{3}\leqslant a<1$ (рис. 19).

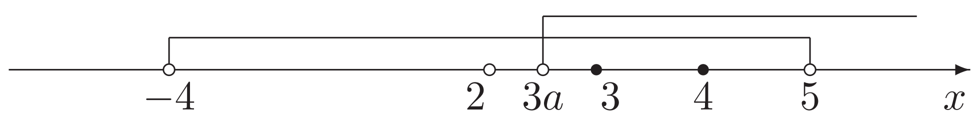


Рис. 19:

2) $a<0$, тогда $x<3a$ и из рис. 20 следует, что условию задачи будут удовлетворять такие значения параметра, что $-2<3a\leqslant-1$ или $-\frac{2}{3}<a\leqslant-\frac{1}{3}$.

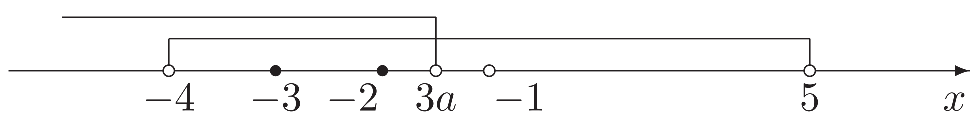


Рис. 20:

Ответ: $a\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};1\right)$.

Задача 5.9. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $\log_5 x+4(1-a^2)\log_{25x}5-2=0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше $\frac{24}{5}$?

Решение.

Допустимыми значениями переменной являются все $x>0$; $x\neq\frac{1}{25}$.

На основании свойств логарифмов преобразуем уравнение к виду $(\log_5 x-2)(\log_5 x+2)+4(1-a^2)=0$, откуда $\log_5 x=\pm 2a$. Таким образом, исходное уравнение имеет два корня вида $x_1=5^{2a}$ и $x_2=5^{-2a}$. Оба эти корня удовлетворяют первому условию ОДЗ $x>0$, а второе условие $x\neq\frac{1}{25}$ будет выполняться при $a\neq\pm1$.

Перейдем теперь к решению задачи. Очевидно, что при $a = 0$ условие задачи не выполняется. Рассмотрим два случая:

1) $a > 0$, тогда $5^{2a} > 5^{-2a}$ и условие задачи равносильно неравенству $5^{2a} - 5^{-2a} > \frac{24}{5}$. Выполняя замену $5^{2a} = t > 0$; $5^{-2a} = \frac{1}{t}$, получим, что $t > 5$ или $a > \frac{1}{2}$.
2) $a < 0$, тогда наоборот, $5^{-2a} > 5^{2a}$ и неравенство имеет вид $5^{-2a} - 5^{2a} > \frac{24}{5}$, откуда после аналогичной замены имеем $a < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задача 5.10. (СГАУ) При каких значениях параметра a неравенство $\log_{|x+a|}(x^2 - ax) \leqslant 2$ выполняется для всех $x \in [2; 3]$?

Решение.

Найдем сначала, при каких значениях параметра a отрезок $[2; 3]$ входит в область допустимых значений переменной, которая определяется системой
$$\begin{cases} x^2 - ax > 0 \\ |x + a| \neq 1 \\ x \neq -a. \end{cases}$$

Если $a \geqslant 0$, то отрезок $[2; 3]$ входит в ОДЗ при $0 \leqslant a < 2$ (рис. 21).

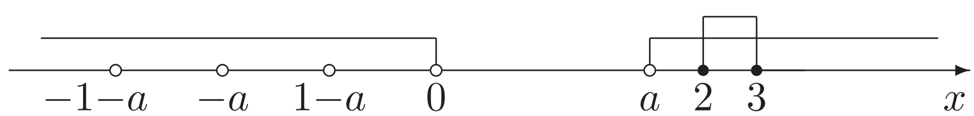


Рис. 21:

При $a < 0$ возможны два случая (рис. 22):
в первом получаем условие $\begin{cases} a < 0 \\ 3 < -1 - a, \end{cases}$ т.е. $a < -4$,
а во втором $\begin{cases} a < 0 \\ 1 - a < 2, \end{cases}$ т.е. $-1 < a < 0$.

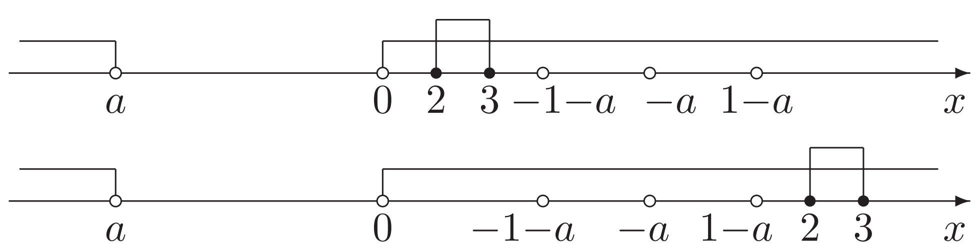


Рис. 22:

Решим отдельно в каждой области.

1) $\begin{cases} 0 \leqslant a < 2 \\ 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$ тогда $|x+a| > 1$, логарифмическая функция возрастает, исходное неравенство равносильно следующему $x^2 - ax \leqslant (x+a)^2$, откуда $x \geqslant -\frac{a}{3}$.

Пересечем полученный ответ с ОДЗ. Из рис. 23 видно, что при

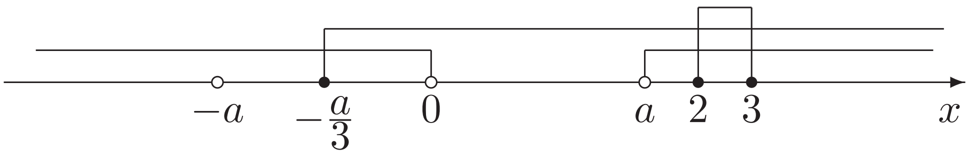


Рис. 23:

всех $a \in [0;2)$ отрезок $[2;3]$ является решением неравенства.

2) $\begin{cases} a < -4 \\ 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$ В этом случае опять $|x+a| > 1$ и аналогично предыдущему получим равносильное неравенство $x^2 - ax \leqslant (x+a)^2$ или $3ax \geqslant -a^2$.

В отличие от случая 1 здесь значения параметра a отрицательны, поэтому решениями являются все $x \leqslant -\frac{a}{3}$. Покажем на рис. 24 условия, при которых пересечение найденного решения с ОДЗ будет содержать отрезок $[2;3]$.

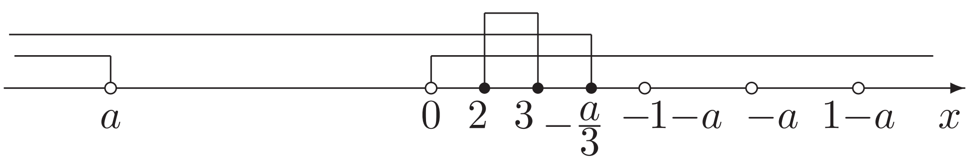


Рис. 24:

Из рис. 24 следует, что такие условия определяются системой

$\begin{cases} -\frac{a}{3} \geqslant 3 \\ 3 < -1 - a, \end{cases}$ т.е. $a \leqslant -9$.

3) При $-1 < a < 0$ аналогично случаю 2 получим решение $x \leqslant -\frac{a}{3}$. Пересекая с ОДЗ, можно убедиться, что отрезок $[2;3]$ не будет являться решением при таких значениях параметра a (рис. 25).

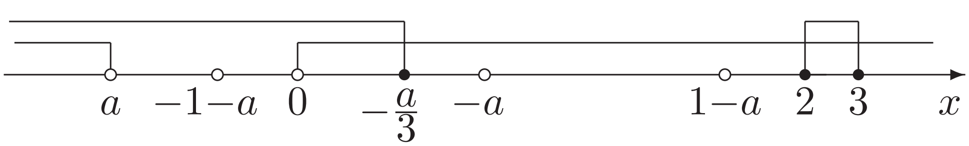


Рис. 25:

Ответ: $a \in (-\infty; -9] \cup [0; 2)$.

Задача 5.11. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ больше единицы при всех x?

Решение.

Рассмотрим сумму логарифмов:

$$S=\log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\right)+\log_a\left(\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right)=\log_a\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right)+\log_a\left(4+\frac{1}{1+x^2}\right),$$

эта сумма имеет смысл при любых x. Заменим $t=\dfrac{1}{1+x^2}$, тогда очевидно, что $0<t\leqslant 1$.

Составим неравенство $\log_a(2+t)+\log_a(4+t)>1$ и найдем значения параметра a, при которых неравенство выполняется при всех $t\in(0;1]$.

1) Если $a>1$, то логарифмическая функция возрастает. Запишем равносильное неравенство

$$(2+t)(4+t)>a \quad \text{или} \quad t^2+6t+8-a>0.$$

Абсцисса вершины параболы $f(t)=t^2+6t+8-a$ равна $t_{\text{в}}=-3$, ветви направлены вверх, следовательно, на интервале $(0;1]$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Неравенство $f(t)>0$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(0)\geqslant 0$, откуда $1<a\leqslant 8$.

2) При $0<a<1$ исходное неравенство равносильно следующему:

$$f(t)=t^2+6t+8-a<0.$$

Аналогично первому случаю, функция $f(t)$ монотонно возрастает на $(0;1]$, поэтому необходимо и достаточно выполнения условия $f(1)<0$, т.е. $1+6+8-a<0$, $a>15$. Полученный ответ не имеет пересечений с условием $0<a<1$.

Ответ: $a\in(\,1;8\,]$.

Задача 5.12. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a сумма $\log_a(2^x-1)$ и $\log_a(2^x-7)$ равна единице ровно при одном x?

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются все $a>0$, $a\neq 1$.

Составим уравнение $\log_a(2^x-1)+\log_a(2^x-7)=1$.

Обозначая $t=2^x>0$, запишем систему, равносильную данному уравнению: $\begin{cases}(t-1)(t-7)=a\\ t>7\end{cases}$ или $t^2-8t+7-a=0.$

Парабола $f(t)=t^2-8t+7-a$ имеет вершину в точке $t_{\text{в}}=4$, ветви направлены вверх, корни расположены симметрично относительно вершины, поэтому условию $t>7$ может удовлетворять только больший корень, которому и будет соответствовать единственное решение уравнения. Необходимым и достаточным условием того, чтобы больший корень был больше 7 является неравенство $f(7) < 0$ или $49 - 56 + 7 - a < 0$, откуда $a > 0$.

Ответ: $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

В зависимости от значений параметра a решите уравнения или неравенства.

Задача 5.13. (СГАУ) $a^{x+2} + 6a^{x+1} + 12a^x + 8a^{x-1} - \dfrac{4}{a} > a + 4$.

Ответ: Если $0 < a < 1:\ x < -\log_a(a+2)$,
если $a = 1:\ x \in R$,
если $a > 1:\ x > -\log_a(a+2)$.

Задача 5.14. (СГАУ) $4^x - (2a+1)\,2^x + a^2 + a = 0$.

Ответ: Если $a \leqslant -1:$ решений нет,
если $-1 < a \leqslant 0:\ x = \log_2(a+1)$,
если $a > 0:\ x_1 = \log_2(a+1);\ x_2 = \log_2 a$.

Задача 5.15. $9^{\lg(x-a)-\lg 2} = 3^{\lg(x-1)}$.

Ответ: Если $a < 0:$ решений нет,
если $0 \leqslant a < 1:\ x_{1,2} = a + 2 \pm 2\sqrt{a}$,
если $a \geqslant 1:\ x = a + 2 + 2\sqrt{a}$.

Задача 5.16. (СГАУ) $a^2 \cdot 4^{2x+1} - 5a \cdot 4^x + 1 > 0$.

Ответ: Если $a \leqslant 0:\ x \in R$,
если $a > 0:\ x \in (-\infty; -\log_4 a - 1) \cup (-\log_4 a; +\infty)$.

Задача 5.17. (СГАУ) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$.

Ответ: Если $a < 0:\ x \in (-\infty; \log_2(-a) - 1)$,
если $a = 0:$ решений нет,
если $a > 0:\ x \in (-\infty; \log_2 a - 2)$.

Задача 5.18. (СГАУ) $25^{x+1} - 4 \cdot 5^{x+1} < a^2 + 4a$.

Ответ: Если $a \leqslant -4:\ x \in \left(-\infty; \log_5(-\frac{a}{5})\right)$,
если $-4 < a < -2:\ x \in \left(\log_5 \dfrac{a+4}{5}; \log_5(-\frac{a}{5})\right)$,
если $a = -2:$ решений нет,
если $-2 < a < 0:\ x \in \left(\log_5(-\frac{a}{5}); \log_5 \dfrac{a+4}{5}\right)$,
если $a \geqslant 0:\ x \in \left(-\infty; \log_5 \dfrac{a+4}{5}\right)$.

Задача 5.19. (СГАУ) $\quad 9^{x+1} - 3^{x+1} \geqslant a^2 + a.$

Ответ: Если $a \leqslant -1: x \in \big[\log_3(-\frac{a}{3}); +\infty\big)$,
если $-1 < a < -\frac{1}{2}: x \in \big(-\infty; \log_3 \frac{a+1}{3}\big] \cup \big[\log_3(-\frac{a}{3}); +\infty\big)$,
если $a = -\frac{1}{2}: x \in R$,
если $-\frac{1}{2} < a < 0 : x \in \big(-\infty; \log_3(-\frac{a}{3})\big] \cup \big[\log_3 \frac{a+1}{3}; +\infty\big)$,
если $a \geqslant 0 : x \in \big[\log_3 \frac{a+1}{3}; +\infty\big)$.

Задача 5.20. $\quad x^{\log_a x} > a.$

Ответ: Если $0 < a < 1 : \quad x \in \big(a; \frac{1}{a}\big)$,
если $a > 1 : \quad x \in \big(0; \frac{1}{a}\big) \cup (a; +\infty)$.

Задача 5.21. (СГАУ) $\quad \log_a(x-2) + \log_a x < 1.$

Ответ: Если $0 < a < 1 : \quad x \in (1 + \sqrt{1+a}; +\infty)$,
если $a > 1 : \quad x \in (2; 1 + \sqrt{1+a}\,)$.

Задача 5.22. (СГАУ) $\quad \log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1.$

Ответ: Если $a \leqslant 0 :$ решений нет,
если $0 < a < 1 : \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}};\; x_3 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$,
если $a = 1 :$ решений нет,
если $a > 1 : \quad x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

Задача 5.23. $\quad \log_{x+2}(x^2 - 2x + a) \geqslant 2.$

Ответ: Если $a \leqslant -8 :$ решений нет,
если $-8 < a \leqslant -3 : \quad x \in \big[\frac{a-4}{6}; 1 - \sqrt{1-a}\,\big)$,
если $-3 < a < -2 : \quad x \in \big[\frac{a-4}{6}; -1\big]$,
если $a = -2 :$ решений нет,
если $a > -2 : \quad x \in \big(-1; \frac{a-4}{6}\big]$.

Задача 5.24. $\quad \sqrt{1 + \log_x \sqrt{a^3}} \cdot \log_a x + 1 = 0.$

Ответ: Если $a < 0;\; a = 1 :$ решений нет,
если $0 < a < 1;\; a > 1 : \quad x = \frac{1}{a^2}$.

Задача 5.25. При каких значениях параметра a имеет решение система
$$\begin{cases} 3^{2x+y} + 3^{x+3y} = 3 \\ 3^y + 3^{-3x-3y} = 3^{a-2x}. \end{cases}$$

Ответ: $a > -1$.

Задача 5.26. При каких значениях параметра a для любого $x < 0$ выполняется неравенство $\log_2(x^2 + ax + 1) > -1$?

Ответ: $a < \sqrt{2}$.

Задача 5.27. (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра a неравенство $x\cdot(9x+\sqrt{24 - \log_a 2}\,) \geqslant \log_{0,5} 2a$ выполняется при любых x?

Ответ: $a = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$; $a \geqslant \sqrt[24]{2}$.

Задача 5.28. (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра a неравенство $x^2 - x\cdot\sqrt{4 + \log_a 7} < \log_7 \dfrac{a}{49}$ не выполняется ни при каких x?

Ответ: $a = \sqrt{7}$; $0 < a \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$.

Задача 5.29. (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра a уравнение $\log_5 x\cdot\big(\log_5(2\lg a - x)\cdot\log_x 5 + 1\big) = 2$ имеет решение?

Ответ: $a \geqslant 10^5$.

Задача 5.30. (СГАУ) При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{\dfrac{x}{4a} - 1}\cdot\log_4(2x - x^2 + 25) > 0$ имеет два целых решения?

Ответ: $a \in \big(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\,\big] \cup \big[\,\frac{3}{4}; 1\big)$.

Задача 5.31. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $\big((3x-a)\sqrt{10a - a^2 - 21} + (x^2 - 2x)\lg(2a-1)\big)\cdot\lg\dfrac{28a - 4a^2}{45} = 0$ имеет по крайней мере два корня, один из которых неположителен, а другой не меньше двух.

Ответ: $a = 3$; $a = \dfrac{9}{2}$; $6 \leqslant a < 7$.

Задача 5.32. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $\log_3 x + (a^2 - 4)\cdot\log_{3x}\dfrac{1}{3} - 3 = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 8?

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Задача 5.33. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_a x + 8\log_{ax^3} x - 3 = 0$$
имеет два корня, расстояние между которыми меньше $\dfrac{3}{2}$?

Ответ: $a \in \big(\frac{1}{2}; 1\big) \cup (1; 2)$.

Задача 5.34. (СГАУ) Найдите, при каких значениях параметра a неравенство $\log_{|x+a|}(x^2-3ax) \leqslant 2$ выполняется для всех $x \in [3;4]$.

Ответ: $a \in (-\infty; -20\,] \cup [\,0; 1\,]$.

Задача 5.35. (СГАУ) Найдите, при каких значениях параметра a неравенство $\log_{|x-a|}(x^2+2ax) \geqslant 2$ выполняется для всех $x \in [2;4]$.

Ответ: $a \in [\,0; 1\,] \cup (\,5; 8\,]$.

Задача 5.36. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a неравенство $\log_2(x-100) - \log_{0,5}\dfrac{|x-101|}{105-x} + \log_2\dfrac{|x-103|(105-x)}{x-100} > a$ имеет единственное целое решение?

Ответ: $0 \leqslant a < \log_2 3$.

Задача 5.37. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ не равна единице ни при каких значениях x?

Ответ: $a \in (\,0; 1\,) \cup (\,1; 6\,] \cup (\,12; +\infty)$.

Задача 5.38. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)$ и $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)$ будет меньше единицы при всех допустимых значениях x?

Ответ: $a \in (\,0; 1\,) \cup (\,16; +\infty)$.

Задача 5.39. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a значение выражения $\left(1-|x|\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше значения выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

Ответ: $a \in (-2; 2\,)$.

Задача 5.40. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a значение выражения $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$ больше значения выражения $0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x?

Ответ: $a \in (-1; 1\,)$.

6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 6.1. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a значение выражения $1+\cos x\cdot(5\cos x+a\,\sin x)$ будет равно нулю хотя бы при одном значении x?

Решение.

Уравнение $1+\cos x\cdot(5\cos x+a\,\sin x)=0$ после преобразований приводится к однородному $\sin^2 x+a\,\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$, которое после деления на $\cos^2 x$ и замены $t=\operatorname{tg}x$ превращается в квадратное: $t^2+at+6=0$. Так как $t=\operatorname{tg}x$ может принимать любые значения, это уравнение будет иметь решения при условии $D\geqslant 0$ или $D=a^2-24\geqslant 0$.

Ответ: $a\in(-\infty;-2\sqrt{6}\,]\cup[\,2\sqrt{6};+\infty)$.

Задача 6.2. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются все $a>0$, $a\neq 1$.

Из уравнения $\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1$ получим, что $(\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5)=a$.

Обозначим $\cos^2 x=t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, тогда уравнение примет вид

$$f(t)=t^2+6t+(5-a)=0.$$

Условия задачи будут выполнены, если последнее уравнение будет иметь хотя бы один корень из отрезка $[0;1]$ (в отличие от задачи 6.1, где корень мог быть любым числом). В данном случае исследование только дискриминанта недостаточно. Ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $t_{\text{в}}=-3$, следовательно, на отрезке $[0;1]$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Для того, чтобы на $[0;1]$ существовал корень, в силу непрерывности необходимо и достаточно, чтобы на концах отрезка $f(t)$ имела разные знаки $f(0)\cdot f(1)\leqslant 0$ или $(5-a)(1+6+5-a)\leqslant 0$. Решая последнее неравенство, получаем

Ответ: $a\in[\,5;12\,]$.

Задача 6.3. (СГАУ) При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} 8\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x+y)+1=0\\ x-y=\alpha \end{cases}$$

имеет решения?

Найдите эти решения в зависимости от значений параметра α.

Решение.

Преобразуем выражение $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big[\cos(x+y)+\cos(x-y)\big]$ и подставим в первое уравнение с учетом $x-y=\alpha$:

$$4\cos^2(x+y)+4\cos\alpha\cdot\cos(x+y)+1=0.$$

Обозначая $\cos(x+y)=t$, вычислим дискриминант $D=16(\cos^2\alpha-1)$. $D\geqslant 0$ возможно только в двух случаях:

1) $\cos\alpha=1$, $\alpha=x-y=2\pi n,\ n\in Z$.

Тогда $\cos(x+y)=-\frac{1}{2}$, $x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Получим решение $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k-n);\end{cases}$

2) $\cos\alpha=-1$, $\alpha=x-y=\pi+2\pi n,\ n\in Z$.

Тогда $\cos(x+y)=\frac{1}{2}$, $x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

и решение системы имеет вид $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi(k+n)\\ y=\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+\pi(k-n).\end{cases}$

Ответ: Если $\alpha=2\pi n:$ $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k-n);\end{cases}$

если $\alpha=\pi+2\pi n:$ $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi(k+n)\\ y=\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+\pi(k-n),\quad n,k\in Z.\end{cases}$

Задача 6.4. (СГАУ) При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{-2a-13}{5}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x-a-4}{5}>0$$

выполняется для любых значений x?

Решение.

Рассмотрим два случая.

1) Если $\frac{-2a-13}{5}>1$ или $a<-9$, то логарифмическая функция возрастает и неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x-a-4}{5}>1.$$

Преобразуем: $\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x>\frac{a+9}{2}$ или $\sin(x-\frac{\pi}{3})>\frac{a+9}{2}$. Так как область значений синуса есть отрезок $[-1;1]$, последнее неравенство будет выполняться при любых x, если выражение $\frac{a+9}{2}$ будет меньше -1, откуда $a<-11$.

2) Если $0<\frac{-2a-13}{5}<1$ или $-9<a<-\frac{13}{2}$, то с учетом убывания логарифмической функции получаем неравенство:

$$0<\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x-a-4}{5}<1$$

или после преобразований $\quad \dfrac{a+4}{2}<\sin(x-\frac{\pi}{3})<\dfrac{a+9}{2}$.

Рассуждая аналогично первому случаю, приходим к системе неравенств $\begin{cases}\dfrac{a+4}{2}<-1\\ \dfrac{a+9}{2}>1,\end{cases}$ откуда $a\in(-7;-6)$, что в пересечении с условием второго случая дает интервал $a\in\left(-7;-\frac{13}{2}\right)$.

Объединяя ответы двух случаев, получаем

Ответ: $a\in(-\infty;-11)\cup\left(-7;-\frac{13}{2}\right)$.

Задача 6.5. (СГАУ) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{1-a}\left(2-\cos x+\sin\frac{x}{2}\right)=2$ имеет решение.

Решение.

Область допустимых значений параметра определяется системой

$\begin{cases}1-a>0\\ 1-a\neq 1,\end{cases}$ откуда $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.

По свойствам логарифмической функции перепишем уравнение в виде
$$2-\cos x+\sin\frac{x}{2}=(1-a)^2.$$
Заменяя $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ и полагая $t=\sin\frac{x}{2}$, получаем квадратное уравнение: $\quad 2t^2+t+2a-a^2=0.$

Это уравнение имеет решения, если $D=8a^2-16a+1\geqslant 0$, откуда с учетом ОДЗ получаем $a\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$.

Найдем теперь, при каких значениях параметра a хотя бы один из корней этого уравнения будет принадлежать отрезку $[-1;1]$. Так как ветви параболы $f(t)=2t^2+t+2a-a^2$ направлены вверх, вершина находится в точке $t_{\text{в}}=-\frac{1}{4}$, то корни располагаются симметрично относительно точки $t=-\frac{1}{4}$. Поэтому, если меньший корень лежит в промежутке $[-1;1]$, то больший — тем более. Таким образом, достаточно выяснить, при каких значениях параметра a больший корень параболы окажется в промежутке $\left[-\frac{1}{4};1\right]$. Это будет в том и только в том случае, если $f(1)\geqslant 0$. Вычисляя $f(1)$, получаем неравенство $3+2a-a^2\geqslant 0$, которое справедливо при $a\in[-1;3]$. Пересекая этот промежуток с предыдущим, получаем

Ответ: $a\in[-1;0)\cup\left(0;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$.

Задача 6.6. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2}+a=\dfrac{\sin x-2}{\sin x-3}$.

Решение.

Полагая $t=\sin x$, приведем уравнение к виду
$$at^2-5at+6a-1=0.$$

Если $a=0$, то решений нет.

При $a\neq 0$ и при условии $a\in(-\infty;-4]\cup(0;+\infty)$ получаем корни уравнения $t_{1,2}=\dfrac{5a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2a}$. Так как вершина параболы $f(t)=at^2-5at+6a-1$ находится в точке $t_{\text{в}}=\dfrac{5}{2}$, условие $|t|\leqslant 1$ для меньшего из корней будет выполняться, если на концах отрезка $[-1;1]$ функция будет иметь разные знаки: $f(-1)\cdot f(1)\leqslant 0$ или $(2a-1)(12a-1)\leqslant 0$. Решением последнего неравенства является интервал $a\in\left[\frac{1}{12};\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: Если $a\in\left[\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{2}\right]$: $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{5a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}+\pi n,\ n\in Z$,
при других a решений нет.

Задача 6.7. При каких значениях параметра a функция $f(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$ является возрастающей на всей числовой оси и не имеет критических точек?

Решение.

Функция $f(x)$ дифференцируема при любом значении a и
$$f'(x)=8a-6a\cos 6x-7-5\cos 5x.$$

Задачу можно переформулировать так: при каких a неравенство $6a\cos 6x+5\cos 5x<8a-7$ справедливо для любого x?

Так как последнее неравенство должно выполняться для любого значения x, оно должно быть справедливо и для $x=0$, откуда $6a+5<8a-7$ или $a>6$. Учитывая теперь, что $6a\cos 6x+5\cos 5x\leqslant 6|a|+5<8a-7$, приходим к выводу, что при $a>6$ неравенство справедливо для любого x.

Ответ: $a>6$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.8. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-a-3=0$.

Ответ: Если $a\in[-3;-2]$: $x=\arccos\sqrt{a+3}+\pi k,\ k\in Z$,
если $a\notin[-3;-2]$: решений нет.

Задача 6.9. (СГАУ) В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$.

Ответ: Если $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$: $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(1-\sqrt{2a-3}\,) + \pi k$, $k \in Z$,
если $a \notin \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$: решений нет.

Задача 6.10. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение
$$(a^2+8a+16)(2-2\cos x-\sin^2 x)+(32+2a^2+16a)(\cos x-1)+3a+10=0$$
не имеет решений?

Ответ: $a < -\frac{10}{3}$; $\quad -3 < a < -2$.

Задача 6.11. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $\log_{a-2}\left(\frac{17}{8} + \cos x - \sin\frac{x}{2}\right) = 3$ имеет решение?

Ответ: $a \in \left[\,\frac{5}{2}; 3\right) \cup \left(3; 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2}\,\right]$.

Задача 6.12. (СГАУ) При каких значениях параметра a уравнение $\log_{a+1}\left(\frac{25}{8} + \cos x - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 3$ имеет решение?

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt[3]{37}}{2} - 1\,\right]$.

Задача 6.13. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a значение выражения $2+\cos x\cdot(3\cos x+a\,\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

Ответ: $a \in \left(-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\,\right)$.

Задача 6.14. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a значение выражения $3 + \sin x \cdot (2\sin x + a\,\cos x)$ будет равно -1 хотя бы при одном значении x?

Ответ: $a \in \left(-\infty; -4\sqrt{6}\,\right) \cup \left(4\sqrt{6}; +\infty\right)$.

Задача 6.15. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\sin x + 2)$ и $\log_a(\sin x + 3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Ответ: $a \in [\,2; 12\,]$.

Задача 6.16. (СГАУ) При каких значениях параметра α система
$$\begin{cases} 4\sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) - 0{,}5 = 0 \\ x - y = \alpha \end{cases}$$
имеет решения? Найдите эти решения в зависимости от значений параметра α.

Ответ: Если $\alpha=2\pi n:\ \begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n)\\ y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n);\end{cases}$

если $\alpha=\pi+2\pi n:\ \begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi(k+n)\\ y=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\pi(k-n),\end{cases}\quad n,k\in Z.$

Задача 6.17. (СГАУ) При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} 2\sin x\cdot\cos y\cdot\sin(x-y)+0{,}25=0\\ x+y=\alpha\end{cases}$$

имеет решения? Найдите эти решения в зависимости от значений параметра α.

Ответ: Если $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n:\ \begin{cases} x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n+k)\\ y=(-1)^{k}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n-k);\end{cases}$

если $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi n:\ \begin{cases} x=(-1)^{k}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n+k)\\ y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n-k),\end{cases}$

$n,k\in Z.$

Задача 6.18. (СГАУ) При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{2a+34}{35}}\frac{2\sqrt{2}\,(\sin x-\cos x)-a+7}{15}<0$$

выполняется для любых значений x?

Ответ: $a\in(-17;-12)\cup\left(\frac{1}{2};3\right).$

Задача 6.19. (СГАУ) При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{3-2a}{23}}\frac{3\sin x+3\sqrt{3}\cos x-2a-12}{28}>0$$

выполняется для любых значений x?

Ответ: $a\in(-\infty;-23)\cup(-10;-9).$

Задача 6.20. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $\cos x\leqslant 2-a^2.$

Ответ: $|a|\leqslant 1\ :\ x\in R,$

$1<|a|\leqslant\sqrt{3}:\ x\in\left[\arccos(2-a^2)+2\pi k;\pi-\arccos(2-a^2)+2\pi k\right],$

$|a|>\sqrt{3}:$ решений нет. $k\in Z$

Задача 6.21. При каких значениях параметра a уравнение

$(a+1)\operatorname{tg}^2x-2\,\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x}+a=0$ не имеет решений?

Ответ: $a\leqslant -3;\quad a\geqslant 1.$

Учебное пособие

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Составители: Ефимов Евгений Александрович
Коломиец Людмила Вадимовна

Компьютерный набор и верстка Е.А. Ефимов

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического
университета имени академика С.П. Королева.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.