ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие
по самостоятельной работе

Печатается по решению редакционно- издательского совета

Самарского государственного аэрокосмического университета

Издательство СГАУ

2 0 0 6

УДК 517.1 (075)
ББК

Рецензенты: проф., доктор тех. наук *Б.А.Горлач,*
доц., канд. физ.-мат. наук *Е.Я. Горелова*

Файницкий Ю.Л.
Дифференциальные уравнения: учеб. пособие по самостоятельной работе / *Ю.Л. Файницкий.* – Самара: Изд- во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 51 с.

ISBN

Предназначено для студентов всех специальностей СГАУ. Содержит материалы по математике, предлагаемые для самостоятельного изучения во втором семестре. Рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений и их систем, особые решения, устойчивость решений.

Определения, утверждения и приемы решения задач, рассматриваемые на лекционных и практических занятиях, здесь не дублируются. Предполагается, что студент уже ознакомился с указанным материалом. Пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

Учебное пособие выполнено на кафедре высшей математики в рамках инновационной образовательной программы «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

УДК 517.1 (075)
ББК

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит материалы по математике, предлагаемые студентам всех специальностей СГАУ для самостоятельного изучения во втором семестре. Здесь рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений и их систем, особые решения, устойчивость решений.

Пособие состоит из 13 пунктов (параграфов), каждый из которых имеет следующую структуру. Параграф, как правило, начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для решения очередной задачи. Теоремы приводятся без доказательств, однако, в каждом конкретном случае указывается учебное пособие, с помощью которого можно ознакомиться с обоснованием соответствующего утверждения.

Далее приводится формулировка и решение очередной задачи. Затем формулируется аналогичная задача, предназначенная для самостоятельного решения, и ответ к ней, если только ответ не следует из условия. В отдельных случаях в завершение параграфа может приводиться еще одна или несколько пар задач.

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы. Прежде всего, необходимо по конспекту и учебнику проработать материал, рассмотренный на лекционных занятиях, ознакомиться с введенными там понятиями, изучить формулировки и доказательства теорем. Затем, опираясь на решения задач, предложенных на практических занятиях, выполнить текущее домашнее задание. И только после этого целесообразно осваивать материал, приведенный в настоящем учебном пособии.

Такая последовательность изучения материала связана, в частности, с тем, что здесь не дублируются рассматриваемые на лекционных и практических занятиях определения, утверждения и приемы. Предполагается, что студент с ними уже ознакомился. Пособие представляют собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

1 УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Пусть дано дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c), \tag{1}$$

где a, b, c – постоянные и f – заданная функция.

Путем введения новой искомой функции

$$z = ax + by + c$$

уравнение (1) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

1. Решить уравнение

$$y' = \sin(x - y). \tag{2}$$

Решение.

Обозначим

$$z = x - y$$

и продифференцируем обе части этого равенства:

$$z' = 1 - y'.$$

Тогда

$$y' = 1 - z'$$

и уравнение (2) принимает вид:

$$1 - z' = \sin z,$$

или

$$z' = 1 - \sin z.$$

Разделим переменные

$$\frac{\mathrm{d}z}{1 - \sin z} = \mathrm{d}x.$$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}z}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)}=\mathrm{d}x.$$

Интегрируя, получим:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)=x+C.$$

Следовательно, уравнение (2) имеет общий интеграл

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=x+C. \tag{3}$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем, до конца данного учебного пособия, символы C, C_1, C_2, ... обозначают произвольные постоянные.

Выясним, не были ли потеряны решения при делении на выражение $1-\sin z$. Если

$$1-\sin z=0,$$

то

$$z=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

$$y=x-2\pi n-\frac{\pi}{2},$$

или, поскольку n – произвольное целое число,

$$y=x+2\pi n-\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Подставив эту функцию в уравнение (2), получим тождество:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x+2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-x-2\pi n+\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, функция (4) является решением уравнения (2) при любом целом значении n.

Выясним, нельзя ли получить это решение из общего при некотором значении параметра C. При этом следует рассматривать, в частности, случаи $C \to \pm\infty$.

Запишем общий интеграл (3) в виде:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\frac{1}{x+C}.$$

При $C \to \infty$ это равенство принимает форму:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=0,$$

или

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}=\pi n,$$

$$y=x+2\pi n-\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, решение (4) получается из общего решения при $C \to \infty$, то есть функция (4) является частным решением уравнения (2), входящим в однопараметрическое множество, заданное уравнением (3) .

2. Решить уравнение

$$y'=ax+by+c$$

(a, b, c – постоянные).

Ответ.

$$b(ax+by+c)+a=Ce^{bx}.$$

3. Решить уравнение

$$(8x+4y+1)+(4x+2y+1)y'=0. \qquad (5)$$

Решение.

Здесь коэффициенты при x и y пропорциональны и уравнение (5) можно записать в форме

$$(4(2x+y)+1)+(2(2x+y)+1)y'=0$$

или

$$y'=-\frac{4(2x+y)+1}{2(2x+y)+1}.$$

Это $-$ уравнение вида (1).

Обозначим

$$z=2x+y,$$

Тогда

$$z'=2+y',\ y'=z'-2$$

и уравнение (5) примет вид

$$4z+1+(2z+1)(z'-2)=0,$$

или

$$4z+1+(2z+1)z'-4z-2=0,$$

$$(2z+1)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x.$$

Найдем общий интеграл уравнения (5):

$$\frac{1}{4}(2z+1)^2=x+C_1,$$

или

$$(4x+2y+1)^2=4x+C.$$

4. Решить уравнение:

$$(x-2y-1)\mathrm{d}x+(3x-6y+2)\mathrm{d}y=0.$$

Ответ:

$$x+3y-\ln|x-2y|=C.$$

1.2 Уравнения, приводящиеся к однородным

1.2.1 Параллельный перенос осей координат

Пусть дано уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{6}$$

где $a,\ b,\ c,\ a_1\ ,b_1\ ,c_1$ – постоянные и f – заданная функция. Предположим также, что $c^2+c_1^2 \neq 0$ и

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Условие $c^2+c_1^2 \neq 0$ означает, что хотя бы один из параметров c, c_1 отличен от нуля.

Введем новые переменные ξ и η с помощью соотношений

$$x = \xi + \alpha,$$
$$y = \eta + \beta,$$

где α и β – постоянные, подлежащие определению. Тогда

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\xi,\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta$$

и уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right).$$

Выберем в качестве α и β решение системы

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0, \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0. \end{cases}$$

Уравнение (6) преобразуется в однородное:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right).$$

Замечание. Решение (α, β) последней системы линейных уравнений представляет собой координаты точки пересечения прямых

$$ax + by + c = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Следовательно, уравнение (6) преобразуется в однородное при переносе начала координат в указанную точку.

5. Решить уравнение

$$(3y - 7x + 7)\mathrm{d}x - (3x - 7y - 3)\mathrm{d}y = 0. \tag{7}$$

Решение.

В форме (6) уравнение (7) имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Введем новые переменные ξ, η:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta.$$

Получим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{-7\xi + 3\eta - 7\alpha + 3\beta + 7}{3\xi - 7\eta + 3\alpha - 7\beta - 3}.$$

Найдем α и β:

$$\begin{cases} -7\alpha + 3\beta + 7 = 0, \\ 3\alpha - 7\beta - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -21\alpha + \ \ 9\beta + 21 = 0, \\ \ \ 21\alpha - 49\beta - 21 = 0, \end{cases}$$
$$\beta = 0,\ \alpha = 1.$$

Таким образом, необходимо решить однородное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{-7\xi + 3\eta}{3\xi - 7\eta}, \tag{8}$$

где

$$\xi = x - 1,\ \eta = y.$$

Примем

$$\frac{\eta}{\xi} = u.$$

Тогда

$$\eta = u\xi,\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u.$$

Подставим в уравнение (8):

$$\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u = \frac{-7 + 3u}{3 - 7u},$$
$$\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{-7 + 3u - 3u + 7u^2}{3 - 7u},$$
$$\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{7u^2 - 7}{3 - 7u}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части уравнения:

$$\frac{3 - 7u}{u^2 - 1}\mathrm{d}u = 7\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi},$$
$$\frac{3}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \frac{7}{2}\ln\left|u^2 - 1\right| = 7\ln|\xi| + \ln C_1.$$

Подставим сюда выражение функции u через ξ и η:

$$\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\dfrac{\eta}{\xi}-1}{\dfrac{\eta}{\xi}+1}\right|-\frac{7}{2}\ln\left|\frac{\eta^2}{\xi^2}-1\right|=7\ln|\xi|+\ln|C_1|,$$

или

$$\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\eta-\xi}{\eta+\xi}\right|-\frac{7}{2}\ln\left|\frac{\eta^2-\xi^2}{\xi^2}\right|=7\ln|\xi|+\ln|C_1|.$$

Упростим это соотношение:

$$3\ln|\eta-\xi|-3\ln|\eta+\xi|-7\ln|\eta-\xi|-7\ln|\eta+\xi|+$$
$$+14\ln|\xi|=14\ln|\xi|+2\ln|C_1|,$$
$$-4\ln|\eta-\xi|-10\ln|\eta+\xi|=2\ln|C_1|,$$
$$-2\ln|\eta-\xi|-5\ln|\eta+\xi|=\ln|C_1|.$$

Выразив ξ и η через x и y и выполнив потенцирование, получим общий интеграл уравнения (7)

$$(x-y-1)^2(x+y-1)^5=C.$$

Замечание 1. В процессе интегрирования уравнения (7) выполнялось деление на функцию

$$3x-7y-3,$$

однако потери решений при этом не произошло. Проверьте это самостоятельно.

Замечание 2. Если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$$

то уравнение (6) может быть записано в форме (1) (задачи **3**, **4).**

6. Решить уравнение:

$$(x+y-2)\mathrm{d}x+(x-y+4)\mathrm{d}y=0.$$

Ответ:

$$y^2-2xy-x^2-8y+4x=C.$$

1.2.2 Подстановка степенной функции

Пусть дано уравнение

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{9}$$

левая часть которого представляет собой многочлен относительно x и y. Сумма степеней, в которых данные переменные входят в некоторое слагаемое этого многочлена, называется измерением указанного слагаемого.

Сделаем в уравнении (9) подстановку $y=z^{\alpha}$ и подсчитаем измерения членов данного уравнения. Если существует значение α, при котором все эти измерения одинаковы, то при данном α уравнение, полученное с помощью указанной подстановки, будет однородным.

7. Решить уравнение

$$2xy'(x-y^2)+y^3=0. \tag{10}$$

Решение.

Сделаем подстановку

$$y=z^{\alpha},$$
$$y'=\alpha z^{\alpha-1}z'.$$

Получим уравнение

$$2x\alpha z^{\alpha-1}z'\left(x-z^{2\alpha}\right)+z^{3\alpha}=0,$$

или

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1}z'-2\alpha x z^{3\alpha-1}z'+z^{3\alpha}=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) однородное, если

$$2+\alpha-1=1+3\alpha-1=3\alpha,$$

то есть при $\alpha=\dfrac{1}{2}$:

$$2\cdot\frac{1}{2}x^2 z^{-\frac{1}{2}}z'-2\cdot\frac{1}{2}xz^{\frac{1}{2}}z'+z^{\frac{3}{2}}=0, \tag{12}$$

или

$$(x^2-xz)z'+z^2=0. \tag{13}$$

Уравнение (13) получено с помощью подстановки

$$y = z^{\alpha} = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}\,,$$

то есть предполагалось, что $y \geq 0$. Выясним, какое уравнение получится, если сделать замену переменной

$$y = -\sqrt{z} = -z^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z'$$

и уравнение (10) принимает вид:

$$-2x \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z' \left(x - \left(-z^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right) - z^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Это равенство совпадает с соотношением (12).

Решим уравнение (13). Введем функцию

$$u = \frac{z}{x}.$$

Тогда

$$z = ux,\ z' = u'x + u.$$

Подставим эти значения в уравнение (13):

$$(x^2 - x^2 u)(u'x + u) + x^2 u^2 = 0,$$

или

$$(1 - u)(u'x + u) + u^2 = 0,$$

$$(u'x + u) = \frac{u^2}{u-1},$$

$$u'x = \frac{u^2 - u^2 + u}{u-1},$$

$$\frac{u-1}{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Выполним интегрирование:

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C|,$$

или

$$u = \ln|Cxu|.$$

Вернемся к переменной z:

$$\frac{z}{x} = \ln|Cz|.$$

Выразив эту переменную через x, получим общий интеграл уравнения (10):

$$y^2 = x\ln\left|Cy^2\right|.$$

8. Решить уравнение:

$$4y^6 + x^3 = 6xy^5y'.$$

Ответ:

$$Cx^4 = y^6 + x^3.$$

1.3 Интегрирующий множитель

Пусть для уравнения

$$M(x,\ y)\mathrm{d}x + N(x,\ y)\mathrm{d}y = 0 \tag{14}$$

выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

то есть соотношение (14) не является уравнением в полных дифференциалах.

Зададим какую-нибудь функцию $\mu(x,\ y)$ и умножим на нее обе части уравнения (14):

$$\mu(x, y)\cdot M(x, y)\mathrm{d}x+\mu(x, y)\cdot N(x, y)\mathrm{d}y=0. \qquad (15)$$

При $\mu \neq 0$ общее решение этого уравнения совпадает с общим решением уравнения (14). Если полученное таким образом уравнение (15) является уравнением в полных дифференциалах, то функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем уравнения (14).

Пусть функции $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\mu(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой односвязной области. Тогда равенство

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (16)$$

представляет собой необходимое и достаточное условие того, что соотношение (15) – уравнение в полных дифференциалах.

Предположим, что это условие выполняется и μ зависит только от переменной x, то есть $\mu=\mu(x)$. Тогда равенство (16) принимает вид

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

или

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right). \qquad (17)$$

Если $\mu=\mu(x)$, то равенство (17) возможно при том и только при том условии, что величина

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

является функцией переменной x. В этом случае, решая уравнение (17), можно найти интегрирующий множитель $\mu(x)$.

Аналогично, если $\mu=\mu(y)$, то

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

где

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

зависит только от y.

9. Решить уравнение

$$(1-x^2 y)\mathrm{d}x+x^2(y-x)\mathrm{d}y=0. \qquad (18)$$

Решение.

Здесь

$$M=1-x^2 y,\ N=x^2(y-x).$$

Поскольку

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x^2,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-3x^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x},$$

то соотношение (18) не является уравнением в полных дифференциалах.

Вычислим

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)}=$$

$$=\frac{2x^2-2xy}{x^2(y-x)}=\frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x}.$$

Так как это выражение зависит только от x, то интегрирующий множитель μ также является функцией переменной x. Согласно равенству (17),

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=-\frac{2}{x},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=-2\ \frac{dx}{x},$$

$$\mu=C_1 x^{-2}.$$

Функция μ определяется с точностью до постоянного множителя, поэтому можно принять $C_1 = 1$.

Умножим обе части равенства (18) на интегрирующий множитель $\mu = x^{-2}$. В результате получится уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1 - x^2 y}{x^2}\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y = 0. \qquad (19)$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1 - x^2 y}{x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - x\right) = -1.$$

Решим уравнение (19). Существует функция u, такая что

$$\mathrm{d}u = \frac{1 - x^2 y}{x^2}\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (y - x),$$

$$u = \frac{y^2}{2} - xy + \varphi(x).$$

Продифференцируем обе части этого соотношения по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y + \varphi'(x).$$

Должно быть справедливо равенство

$$\frac{1 - x^2 y}{x^2} = -y + \varphi'(x),$$

или

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Поэтому

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} + C_2$$

и

$$u=\frac{y^2}{2}-xy-\frac{1}{x}+C_2.$$

Соответственно, общий интеграл уравнения (18) может быть записан в виде:

$$\frac{y^2}{2}-xy-\frac{1}{x}=C.$$

10. Решить уравнение

$$(2xy^2-3y^3)\mathrm{d}x+(7-3xy^2)\mathrm{d}y=0.$$

Ответ:

$$x^2-\frac{7}{y}-3xy=C.$$

1.4 Особые решения

Определение. Решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{20}$$

называется особым, если в каждой точке $(x_0,\ y_0)$ интегральной кривой $y=\varphi(x)$ нарушается единственность решения, то есть через каждую такую точку проходит хотя бы еще одна интегральная кривая указанного уравнения, имеющая в точке $(x_0,\ y_0)$ ту же касательную, что и кривая $y=\varphi(x)$, но не совпадающая с этой кривой на сколь угодно малой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$.

Пусть уравнение (20) имеет общий интеграл

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0. \tag{21}$$

Множество интегральных кривых, заданное уравнением (21), представляет собой однопараметрическое семейство кривых с параметром C.

Определение. Линия Γ называется огибающей однопараметрического семейства кривых, если эта линия касается каждой кривой данного семейства, причем в различных точках линии Γ ее касаются различные кривые семейства.

Например, каждая из прямых $y = \pm 1$ является огибающей семейства окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

Продифференцируем обе части равенства (21) по C и составим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x,\ y,\ C) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C}\Phi(x,\ y,\ C) = 0. \end{cases}$$

Исключим параметр C из этой системы. В результате получится уравнение, содержащее x и y. Предположим, что оно определяет некоторую функцию $y = \psi(x)$. Если эта функция удовлетворяет уравнению (20), то она задает огибающую семейства интегральных кривых (21), а огибающая такого семейства представляет собой особое решение уравнения (20) [3, гл. XIII, § 11 − 12].

11. Найти особые решения уравнения

$$y' = 2\sqrt{y}. \tag{22}$$

Решение.

Разделим переменные:

$$\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = \mathrm{d}x.$$

Проинтегрируем:

$$\sqrt{y} = x + C.$$

Запишем общее решение уравнения (22):

$$y = (x + C)^2. \tag{23}$$

Продифференцируем обе части этого равенства по параметру C и составим систему уравнений

$$
\begin{cases} y = (x + C)^2, \\ 0 = 2(x + C). \end{cases}
$$

Исключим из этой системы C. Так как $x + C = 0$, то в результате исключения получим:

$$
y = 0. \tag{24}
$$

Подстановка этой функции в уравнение (22) показывает, что она является его решением. Следовательно, уравнение (22) имеет особое решение (24).

Это подтверждается и геометрически: прямая (24) представляет собой огибающую семейства интегральных кривых − парабол (23). Следовательно, указанная прямая является интегральной кривой, соответствующей особому решению.

12. Найти особые решения уравнения

$$
y' = 3\sqrt[3]{(y-1)^2}.
$$

Ответ:

$$
y = 1.
$$

1.5 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Пусть дифференциальное уравнение

$$
F(x, y, y') = 0
$$

разрешимо относительно искомой функции, то есть может быть записано в виде

$$
y = f(x, y'). \tag{25}
$$

Введем обозначение $y' = p(x)$. В результате получится уравнение

$$
y = f(x, p(x)).
$$

Продифференцируем обе его части по x:

$$
y' = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)p',
$$

или

$$p = f'_x(x,\ p) + f'_p(x,\ p)p'. \tag{26}$$

Так как здесь считается, что функция f известна, то соотношение (26) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с искомой функцией p. Пусть решением этого уравнения является функция

$$p = \varphi(x,\ C). \tag{27}$$

Тогда общее решение уравнения (25) имеет форму

$$y = f(x,\ \varphi(x,\ C)).$$

Следует иметь в виду, что нельзя заменять переменную p в равенстве (27) на y' и затем интегрировать полученное дифференциальное уравнение. Это видно уже из того, что найденная таким путем функция будет зависеть от двух произвольных постоянных вместо одной.

Если для уравнения (26) получен общий интеграл в виде

$$x = \psi(p,\ C),$$

то решение уравнения (25) может быть задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} y = f(x,\ p), \\ x = \psi(p,\ C). \end{cases}$$

13. Решить уравнение

$$y = y'^2 + 4y'^3 . \tag{28}$$

Решение.

Будем считать, что

$$y' = p(x).$$

Тогда

$$y = p^2 + 4p^3. \tag{29}$$

Продифференцируем обе части этого равенства по x:

$$p = 2p \cdot p' + 12p^2 \cdot p',$$

или

$$p(2p' + 12p \cdot p' - 1) = 0. \tag{30}$$

Рассмотрим уравнение

$$2p'+12p\cdot p'-1=0,$$

или

$$p'(2+12p)=1.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$(2+12p)\mathrm{d}p=\mathrm{d}x,$$

$$x=2p+6p^2+C.$$

Общее решение уравнения (30) можно задать в параметрической форме:

$$\begin{cases} y=p^2+4p^3, \\ x=2p+6p^2+C. \end{cases} \quad (31)$$

Уравнение (30) удовлетворяется также, если

$$p=0. \quad (32)$$

При известном $p(x)$ решение уравнения (28) получается путем подстановки данной функции в соотношение (29). Выполнив эту операцию с учетом равенства (32), получим решение

$$y=0. \quad (33)$$

Оно не может быть получено из решения (31) ни при каких значениях параметра C.

Действительно, изменение постоянной C приводит к сдвигу интегральной кривой вдоль оси Ox, не влияя на форму этой кривой. Следовательно, кривая (31) не обращается в прямую ни при каком значении параметра C и частное решение (33) не принадлежит однопараметрическому семейству (31).

Выясним, имеют ли линии (31) и (33) общие точки. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y=p^2+4p^3, \\ x=2p+6p^2+C, \\ y=0. \end{cases}$$

Она имеет решение

$$y = 0,\ x = C,\ p = 0.$$

Следовательно, через каждую точку $(C,\ 0)$ оси Ox проходит две интегральных кривых уравнения (28): линия (31) и прямая (33).

Для линии, заданной уравнениями (31) имеем:

$$y' = p.$$

В общих точках линий (31) и (33) $p = 0$ и $y' = 0$. Таким образом, в указанных точках производные функций (31) и (33) совпадают, прямая (33) касается линии (31) при всяком значении параметра C. Значит, функция (33) является особым решением уравнения (28).

Таким образом, уравнение (28) имеет общее решение (31) и особое решение (33).

14. Решить уравнение

$$x = y' \cos y'.$$

Ответ:

$$x = p\cos p,$$
$$y = p^2 \cos p - p\sin p - \cos p + C.$$

Указание. В данном случае заданное уравнение имеет вид

$$x = f(y, y'). \tag{34}$$

Считайте, что $y' = p(y)$. Тогда уравнение (34) принимает форму

$$x = f(y, p).$$

Продифференцируем обе его части по y:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

Учитывая соотношение

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{p},$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

где f – известная функция.

Интегрируя его, найдем решение уравнения (34) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ y = \varphi(p, C). \end{cases}$$

2 УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Уравнение в форме равенства производных

Пусть дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$(f(x,\, y,\, y',\, \dots,\, y^{(n-1)}))' = (\varphi(x,\, y,\, y',\, \dots,\, y^{(n-1)}))',$$

то есть представляет собой равенство производных двух выражений, содержащих независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные. Тогда порядок уравнения может быть понижен на единицу путем интегрирования обеих частей уравнения.

15. Решить уравнение

$$\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}. \qquad (35)$$

Решение.

Запишем уравнение (35) в виде

$$-\frac{y'''y' - y''^2}{y'^2} = \frac{1}{x^2},$$

или

$$\frac{\left(y''\right)' \cdot y' - y'' \cdot \left(y'\right)'}{y'^2} = -\frac{1}{x^2},$$

то есть

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y''}{y'}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Выполним интегрирование:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} + C_1.$$

Считая, что $y' = p(x)$, получим уравнение

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{x} + C_1,$$

или

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + C_1 \mathrm{d}x.$$

Интегрируя, найдем:

$$\ln|p| = \ln|x| + C_1 x + \ln|C_2|.$$

Потенцируем:

$$p = C_2 x e^{C_1 x},$$

или

$$y' = C_2 x e^{C_1 x}.$$

Интегрируем еще раз:

$$y = C_3 + \int C_2 x e^{C_1 x} \mathrm{d}x. \tag{36}$$

Интеграл вычислим по частям:

$$u = x,\ \mathrm{d}v = e^{C_1 x}\mathrm{d}x,\ v = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}$$

и

$$\int x e^{C_1 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x} - \int \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x} + C.$$

Решение (36) уравнения (35) принимает вид:

$$y = C_3 + C_2\left(\frac{1}{C_1} x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x}\right),$$

или

$$y = C_3 + \frac{C_2}{C_1}\left(x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}\right).$$

Имея в виду, что $\frac{C_2}{C_1}$ – произвольная постоянная, решение можно записать в форме:

$$y = C_3 + C_2\left(x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}\right).$$

16. Решить уравнение

$$yy''+y'^2=x.$$

Ответ:

$$y^2=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2.$$

2.2 Уравнение Эйлера

Определение. Дифференциальное уравнение

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\ \ldots\ +a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

называется уравнением Эйлера. Здесь $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n$ − постоянные, $x\neq 0$, $f(x)$ − заданная функция.

В области, где $x>0$, уравнение Эйлера с помощью подстановки $x=e^t$ преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Если $x<0$, используется подстановка $x=-e^t$.

17. Решить уравнение

$$x^2y''+xy'+4y=10x. \tag{37}$$

Решение.

Сделаем замену переменной $x=e^t$. Пусть $y=\varphi(x)$ − решение уравнения (37). Тогда

$$y=\varphi(e^t)=y(t).$$

Таким образом, при замене $x=e^t=x(t)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), \end{cases} \tag{38}$$

то есть можем считать, что решение определяется параметрическими уравнениями (38).

Для производных y' и y'' при этом получим формулы:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t} y'_t,$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(e^{-t} y'_t\right)'_t}{x'_t} =$$

$$= \frac{-e^{-t} y'_t + e^{-t} y''_{tt}}{e^t} = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right).$$

Подставим данные выражения в уравнение (37):

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) + e^t \cdot e^{-t} y'_t + 4y = 10e^t,$$

или

$$y''_{tt} + 4y = 10e^t. \tag{39}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение

$$Y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Частное решение неоднородного уравнения (39) будем искать в виде:

$$\overline{y} = Ae^t.$$

Подставим эту функцию в указанное уравнение:

$$Ae^t + 4Ae^t = 10e^t.$$

Отсюда

$$A = 2,\ \overline{y} = 2e^t.$$

Запишем общее решение уравнения (39):

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2e^t. \tag{40}$$

Так как

$$x = e^t,\ t = \ln x,$$

то

$$y = C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) + 2x. \qquad (41)$$

Если предположить, что $x < 0$ и применить подстановку $x = -e^t$, то

$$y'_x = -e^{-t} y'_t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(-e^{-t} y'_t\right)'}{-e^t} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t).$$

Уравнение (37) преобразуется к виду

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - e^t \cdot (-e^{-t}) y'_t + 4y = -10e^t,$$

или

$$y''_{tt} + 4y = -10e^t. \qquad (42)$$

Подставляя сюда частное решение в форме $\overline{y} = Ae^t$, получим

$$Ae^t + 4Ae^t = -10e^t,$$
$$A = -2, \ \overline{y} = -2e^t.$$

Общее решение уравнения (42) записывается в виде

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 2e^t.$$

При этом

$$x = -e^t, \ t = \ln(-x),$$

$$y = C_1 \cos(2\ln(-x)) + C_2 \sin(2\ln(-x)) + 2x.$$

Объединяя эту формулу с равенством (41), найдем общее решение уравнения (37):

$$y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x.$$

18. Решить уравнение

$$x^2 y'' - 6y = 12\ln x.$$

Ответ:

$$y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}.$$

2.3 Уравнение, однородное относительно функции и ее производных

Пусть уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

однородное относительно искомой функции y и ее производных, то есть

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \tag{43}$$

где k – постоянная, $t > 0$.

С помощью подстановки $z = \dfrac{y'}{y}$ порядок уравнения (43) может быть понижен на единицу.

19. Решить уравнение

$$xyy'' + xy'^2 = 2yy'. \tag{44}$$

Решение.

Если учитывать только функцию y и ее производные y' и y'', то каждый член уравнения имеет измерение, равное двум. Следовательно, уравнение (44) – однородное относительно указанных переменных.

Будем считать, что $y' = yz$, где z – новая искомая функция. Тогда

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'.$$

Подставим эти выражения для производных в уравнение (44):

$$xy^2z^2 + xy^2z' + xy^2z^2 = 2y^2z,$$

или

$$y^2(2xz^2 + xz' - 2z) = 0. \qquad (45)$$

Рассмотрим соотношение

$$xz' - 2z = -2xz^2,$$

то есть

$$z' - 2\frac{z}{x} = -2z^2.$$

Это уравнение Бернулли. Будем искать его решение в виде произведения функций:

$$z = uv.$$

Тогда

$$u'v + uv' - 2\frac{uv}{x} = -2u^2v^2$$

и

$$\begin{cases} u' - 2\dfrac{u}{x} = 0, \\ v' = -2uv^2. \end{cases}$$

Первое из данных уравнений имеет решение

$$u = x^2.$$

Подставим это значение во второе уравнение системы:

$$v' = -2x^2v^2,$$

или

$$\frac{dv}{v^2} = -2x^2\mathrm{d}x.$$

Интегрируя, получим соотношение

$$\frac{1}{v} = 2\frac{x^3}{3} + C_1,$$

или

$$v = \frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + C_1}.$$

Поэтому

$$z = \frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3 + C_1}.$$

Так как $z = \frac{y'}{y}$, то

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3 + C_1},$$

или

$$2\frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{x^3 + \frac{3}{2}C_1}.$$

Выполним интегрирование:

$$2\ln|y| = \ln\left|x^3 + \frac{3}{2}C_1\right| + \ln|C_2|.$$

Потенцируем:

$$y^2 = C_2(x^3 + \frac{3}{2}C_1). \qquad (46)$$

Заменяя обозначение произвольной постоянной C_2 на C_1, а $\frac{3}{2}C_1C_2$ – на C_2, получим общий интеграл уравнения (44) в форме

$$y^2 = C_1x^3 + C_2.$$

Приравнивая нулю первый из сомножителей левой части уравнения (45), получим решение

$$y = 0.$$

Однако это равенство не расширяет множества решений уравнения (44), так как функция $y = 0$ определяется соотношением (46) при $C_1 = C_2 = 0$.

20. Решить уравнение

$$2yy''-3y'^2=4y^2.$$

Ответ:

$$y=\frac{C_1}{\cos^2(x+C_2)}.$$

2.4 Уравнение с известными частными решениями

Если линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ \dots\ +a_n(x)y=0$$

имеет решение y_1, то порядок неоднородного уравнения с такой же правой частью

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ \dots\ +a_n(x)y=f(x)$$

может быть понижен на единицу с помощью замены переменной $y=y_1z$, где z − новая искомая функция. Уравнение при этом остается линейным. Затем следует сделать замену $z'=p$.

21. Известно, что уравнение

$$(x-1)y''-xy'+y=0$$

имеет частное решение $y_1=e^x$. Найти общее решение уравнения

$$(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^x. \tag{47}$$

Решение.

Сделаем замену переменной $y=e^xz$. Тогда

$$y'=e^xz+e^xz',$$
$$y''=e^xz+2e^xz'+e^xz''.$$

Подставим эти выражения в уравнение (47):

$$(x-1)(e^x z + 2e^x z' + e^x z'') - x(e^x z + e^x z') + e^x z = (x-1)^2 e^x .$$

Сократим на e^x и приведем подобные члены:

$$xz + 2xz' + xz'' - z - 2z' - z'' - xz - xz' + z = (x-1)^2 ,$$
$$(x-1)z'' + (x-2)z' = (x-1)^2 .$$

Обозначим $z' = p$. Получим линейное уравнение первого порядка:

$$(x-1)p' + (x-2)p = (x-1)^2 ,$$

или

$$p' + \frac{x-2}{x-1}p = (x-1) . \tag{48}$$

Представим функцию p в виде произведения:

$$p = uv .$$

Тогда

$$u'v + uv' + \frac{x-2}{x-1}uv = x-1 ,$$
$$\begin{cases} u' + \dfrac{x-2}{x-1}u = 0, \\ uv' = x-1. \end{cases}$$

Решим первое из уравнений системы:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x ,$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \left(-1 + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x ,$$
$$\ln|u| = -x + \ln|x-1| ,$$
$$u = e^{-x}(x-1) .$$

Второе уравнение системы примет вид:

$$e^{-x}(x-1)v' = x-1,$$

или

$$v' = e^x.$$

Поэтому

$$v = e^x + C_1$$

и решение уравнения (48) записывается в виде:

$$p = x-1+C_1 e^{-x}(x-1).$$

Так как $p = z'$, то

$$z' = x-1+C_1 e^{-x}(x-1).$$

Интегрируя, найдем функцию z:

$$z = \frac{(x-1)^2}{2} + C_1(-e^{-x}(x-1) - e^{-x} + C_2),$$

или

$$z = \frac{(x-1)^2}{2} - C_1 x e^{-x} + C_1 C_2.$$

Учитывая, что $y = e^x z$ и при этом $(-C_1)$, $C_1 C_2$ – произвольные постоянные, получим общее решение уравнения (47):

$$y = C_1 x + C_2 e^x + \frac{(x-1)^2}{2} e^x.$$

22. Известно, что уравнение

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

имеет частное решение $y_1 = x$. Найти общее решение данного уравнения.

Ответ:

$$y = C_1 x + C_2 \ln x.$$

3 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Метод вариации произвольных постоянных

Пусть задана нормальная линейная неоднородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\ \ldots\ +a_{1n}(t)x_n+f_1(t),\\
&\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\ \ldots\ +a_{2n}(t)x_n+f_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\ \ldots\ +a_{nn}(t)x_n+f_n(t).
\end{aligned} \tag{49}$$

Обозначим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \ldots\\ f_n(t)\end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (49) может быть записана в виде одного уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+F\,. \tag{50}$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX\,. \tag{51}$$

Предположим, что оно имеет фундаментальную систему решений

$$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n.$$

Тогда общее решение уравнения (51) имеет вид:

$$\overline{X} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ \dots\ + C_n X_n = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i\ .$$

Здесь, как всегда, $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ − произвольные скалярные постоянные.

Будем искать частное решение уравнения (50) в форме

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i\,, \tag{52}$$

где $C_1(t),\ C_2(t),\ \dots,\ C_n(t)$ − функции, которые необходимо найти. Тогда общее решение уравнения (50) примет вид:

$$X = \overline{X} + \sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i\ .$$

Подставим частное решение (52) в указанное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} (C_i'(t) X_i + C_i(t) X_i') = A \sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i + F\,,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t) X_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \left(X_i' - A X_i \right) = F\ .$$

Учтем, что X_i является решением уравнения (51), то есть

$$X_i' - A X_i = 0\,,\ \ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n\,.$$

Поэтому функции $C_i(t)$ определяются уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t) X_i = F.$$

23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x - 2y + t, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - 4y. \end{cases} \tag{53}$$

Решение.

Обозначим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x - 2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - 4y \end{cases} \tag{54}$$

и матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица второго порядка, λ – параметр.

Запишем однородную систему линейных уравнений с матрицей $A - \lambda E$:

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (-4-\lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases} \tag{55}$$

составим характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и решим его:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$
$$\lambda = 2,\ \lambda = -3.$$

При $\lambda = 2$ система (55) принимает вид

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

и имеет решение $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1$.

При $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} 6\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{cases}$$
$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3.$$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (54) можно записать в форме:

$$\overline{X} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\overline{X} = C_1 X_1 + C_2 X_2,$$

где

$$X_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

есть фундаментальная система решений системы (54).

Будем искать частное решение неоднородной системы (53) в виде

$$C_1(t) X_1 + C_2(t) X_2,$$

или

$$C_1(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для отыскания функций $C_1(t),\ C_2(t)$ составим уравнение

$$\sum_{i=1}^{2} C_i' X_i = F,$$

то есть

$$C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 = F.$$

В данном случае имеем:

$$C_1' e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_2' e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 2C_1' e^{2t} + C_2' e^{-3t} = t, \\ C_1' e^{2t} + 3C_2' e^{-3t} = 0. \end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & 3e^{-3t} \end{vmatrix} = 5e^{-t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} t & e^{-3t} \\ 0 & 3e^{-3t} \end{vmatrix} = 3te^{-3t},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & t \\ e^{2t} & 0 \end{vmatrix} = -te^{2t}.$$

Найдем производные функций $C_1(t),\ C_2(t)$:

$$C_1' = \frac{3}{5}te^{-2t},\ C_2' = -\frac{1}{5}te^{3t}.$$

Вычислим указанные функции:

$$C_1(t) = \frac{3}{5}\int te^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\mathrm{d}t\right) =$$

$$=\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)=\left(-\frac{3}{10}t-\frac{3}{20}\right)e^{-2t},$$

$$C_2(t)=-\frac{1}{5}\int te^{3t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{1}{3}\int e^{3t}\mathrm{d}t\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{1}{9}e^{3t}\right)=\left(-\frac{1}{15}t+\frac{1}{45}\right)e^{3t}.$$

Произвольные постоянные при этом интегрировании считаем равными нулю.

Получим решение системы (53):

$$X=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+$$

$$+\left(-\frac{3}{10}t-\frac{3}{20}\right)e^{-2t}e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{15}t+\frac{1}{45}\right)e^{3t}e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$

или

$$x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{3}{5}t-\frac{3}{10}-\frac{1}{15}t+\frac{1}{45},$$

$$y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\frac{3}{10}t-\frac{3}{20}-\frac{1}{5}t+\frac{1}{15},$$

то есть

$$x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{18},$$

$$y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}.$$

24. Методом вариации произвольных постоянных решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x+y-e^{2t},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3x+2y+6e^{2t}.\end{cases}$$

Ответ.

$$x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+2e^{2t},$$

$$y=3C_1e^{t}+C_2e^{-t}+9e^{2t}.$$

3.2 Фазовая траектория

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_1(t,\ x,\ y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f_2(t,\ x,\ y) \end{cases} \tag{56}$$

и известно решение этой системы:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{57}$$

Систему (57) можно считать параметрическими уравнениями некоторой кривой Γ на плоскости xOy. При изменении параметра t точка $(x,\ y)$ перемещается вдоль этой кривой. Плоскость xOy называют фазовой плоскостью, а кривую Γ − фазовой траекторией системы уравнений (56).

25. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x + e^t, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + e^t. \end{cases} \tag{58}$$

Найти ее фазовую траекторию, проходящую при $t = 0$ через точку (1; 1).

Решение.

Чтобы найти фазовую траекторию, следует решить задачу Коши для системы (58) при начальных условиях

$$x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

Применим метод вариации произвольных постоянных. Обозначим матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

и рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y. \end{cases} \qquad (59)$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и решим его:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0,$$
$$\lambda = 0,\ \lambda = -2.$$

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (-1-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ она принимает вид:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1$.

При $\lambda = -2$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \end{cases}$$
$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1.$$

Получим общее решение системы (59):

$$\overline{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение

$$C_1' X_1 + C_2' X_2 = F,$$

или

$$C_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2' e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-2t} = e^t, \\ C_1' - C_2' e^{-2t} = e^t. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-2t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-t},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_1' = e^t, \ C_2' = 0.$$

Вычислим функции

$$C_1(t) = e^t, \ C_2(t) = 0$$

и запишем общее решение системы (58):

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или

$$x = C_1 + C_2 e^{-2t} + e^t,$$
$$y = C_1 - C_2 e^{-2t} + e^t.$$

Учитывая, что при $t = 0$ фазовая траектория должна проходить через точку с координатами $x = 1,\ y = 1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 1, \\ C_1 - C_2 + 1 = 1, \end{cases}$$

которая имеет решение $C_1 = 0,\ C_2 = 0$.

Таким образом, искомая фазовая траектория может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t, \end{cases}$$

то есть это – прямая

$$y = x.$$

26. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 2y + t. \end{cases}$$

Найти ее фазовую траекторию, проходящую при $t = 0$ через точку $(0;\ 0)$.

Ответ: $y = 0$.

3.3 Устойчивость точки покоя

Пусть дана нормальная система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_1(t,\ x,\ y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f_2(t,\ x,\ y) \end{cases} \tag{60}$$

и известно ее решение

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{61}$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi(t_0) = x_0,\ \psi(t_0) = y_0, \tag{62}$$

где $t_0,\ x_0,\ y_0\ -$ заданные постоянные.

Определение. Решение (61) – (62) системы (60) называется устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

системы (60), удовлетворяющего неравенствам

$$\left| x(t_0) - \varphi(t_0) \right| < \delta,$$
$$\left| y(t_0) - \psi(t_0) \right| < \delta,$$

для всех $t > t_0$ справедливы соотношения

$$\left| x(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon,$$
$$\left| y(t) - \psi(t) \right| < \varepsilon.$$

Смысл данного определения в том, что малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям устойчивого решения.

Пусть задана линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{63}$$

коэффициенты которой постоянны и определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если для системы (63) заданы начальные условия

$$x(0)=0,\ y(0)=0,$$

то она имеет при этих условиях решение

$$x=0,\ y=0.$$

Определяемая данным решением фазовая траектория представляет собой одну точку (0; 0).

Определение. Если фазовая траектория системы дифференциальных уравнений состоит из одной точки, то такая траектория называется точкой покоя данной системы.

Чтобы исследовать устойчивость точки покоя (0; 0) системы (63), следует решить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Если действительные части обоих корней данного уравнения отрицательны, то точка покоя устойчива. В частности, она устойчива, если характеристическое уравнение имеет отрицательные действительные корни. Если корни комплексные, то точка покоя устойчива также в случае, когда действительные части корней нулевые, а мнимые отличны от нуля [3, гл. XIII, § 31].

27. Исследовать устойчивость точки покоя (0; 0) системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}= \quad x+2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+y. \end{cases} \tag{64}$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Так как их действительные части положительны,

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = 1 > 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda_2 = 1 > 0,$$

то точка покоя (0; 0) системы уравнений (64) неустойчива.

28. Исследовать устойчивость точки покоя (0; 0) системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 2y. \end{cases}$$

Ответ: Устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие / Г.Н. Берман – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005 – 432 с.
2. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Макаренко. – М.: Высшая школа, 1978. – 287 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2: Учеб. пособие / Н.С.Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : Учеб. пособие для втузов. / Под ред. А. В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1995. – 365 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ф а й н и ц к и й Юрий Львович

Дифференциальные уравнения
Учебное пособие

РЕДАКТОР…..

Подписано в печать…...2006 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. …… Усл. кр.-отт…... Уч.-изд. л. …...
Тираж ….. экз. Заказ Арт……...

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086 Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34