ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Учебное пособие
по самостоятельной работе

Печатается по решению редакционно- издательского совета

Самарского государственного аэрокосмического университета

Издательство СГАУ

2 0 0 6

УДК 517.1 (075)
ББК

Рецензенты: проф., доктор тех. наук *Б.А.Горлач,*
доц., канд. физ.-мат. наук *Е.Я. Горелова*

Файницкий Ю.Л.
Методы вычисления интегралов: учеб. пособие по самостоятельной работе / *Ю.Л. Файницкий.* – Самара: Изд- во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 41 с.

ISBN

Предназначено для студентов всех специальностей СГАУ. Содержит материалы по математике, предлагаемые для самостоятельного изучения во втором семестре. Рассматриваются методы интегрирования рациональных и иррациональных функций, некоторые методы вычисление определенного интеграла, несобственные интегралы в смысле главного значения.

Определения, утверждения и приемы решения задач, рассматриваемые на лекционных и практических занятиях, здесь не дублируются. Предполагается, что студент уже ознакомился с указанным материалом. Учебное пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

Учебное пособие выполнено на кафедре высшей математики в рамках инновационной образовательной программы «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

УДК 517.1 (075)
ББК

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит материалы по математике, предлагаемые студентам всех специальностей СГАУ для самостоятельного изучения во втором семестре. Здесь рассматриваются методы интегрирования рациональных и иррациональных функций, некоторые методы вычисление определенного интеграла, несобственные интегралы в смысле главного значения.

Пособие состоит из 14 пунктов (параграфов), каждый из которых имеет следующую структуру. Параграф, как правило, начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для решения очередной задачи. Теоремы приводятся без доказательств, однако, в каждом конкретном случае указывается учебное пособие, с помощью которого можно ознакомиться с обоснованием соответствующего утверждения.

Далее приводится формулировка и решение очередной задачи. Затем формулируется аналогичная задача, предназначенная для самостоятельного решения, и ответ к ней, если только ответ не следует из условия. В отдельных случаях в завершение параграфа может приводиться еще одна или несколько пар задач.

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы. Прежде всего, необходимо по конспекту и учебнику проработать материал, рассмотренный на лекционных занятиях, ознакомиться с введенными там понятиями, изучить формулировки и доказательства теорем. Затем, опираясь на решения задач, предложенных на практических занятиях, выполнить текущее домашнее задание. И только после этого целесообразно осваивать материал, приведенный в настоящем учебном пособии.

Такая последовательность изучения материала связана, в частности, с тем, что здесь не дублируются рассматриваемые на лекционных и практических занятиях определения, утверждения и приемы. Предполагается, что студент с ними уже ознакомился. Пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1 Интегрирование рациональных функций

Определение. Число k называется кратностью корня a многочлена $P_n(x)$, если этот многочлен делится на $(x-a)^k$ и не делится на $(x-a)^{k+1}$. Если $k=1$, то корень a называется простым, если $k \neq 1$, то кратным.

При разложении рациональной функции на простейшие дроби приходится определять параметры этих дробей, например, приводя данную сумму к общему знаменателю, записывая равенство некоторых многочленов и составляя систему линейных уравнений, нередко весьма громоздкую. Можно также получить систему линейных уравнений для искомых параметров, подставляя в указанное равенство многочленов различные значения переменной интегрирования. Наиболее эффективен этот метод, если подставлять корни знаменателя рассматриваемой функции, в том числе комплексные. Если корни кратные, то система будет содержать число уравнений, недостаточное для определения всех параметров. Однако в этом случае можно получить дополнительные уравнения, дифференцируя левую и правую части упомянутого равенства многочленов.

1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}.$$

Приравняем числители после приведения дробей в правой части к общему знаменателю:

$$x(x-2) = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 +$$
$$+(Dx+E)(x-1)^2(x^2+1) + (Fx+G)(x-1)^2. \qquad (1)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет корни $1,\ i,\ -i$. Подставив $x=1$ в равенство (1), получим:

$$-1 = B \cdot 4;\ B = -\frac{1}{4}.$$

При $x = i$ соотношение (1) принимает вид:

$$-1 - 2i = (Fi + G)(-2i).$$

Приравняем действительные и мнимые части:

$$F = -\frac{1}{2};\ G = 1.$$

Продифференцируем обе части равенства (1), оставляя в записи только те слагаемые, которые не содержат множителя $(x-1)$:

$$2x - 2 = A(x^2+1)^2 - \frac{1}{4} \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x + \ \ldots$$

При $x = 1$ это равенство примет вид:

$$0 = A \cdot 4 - 2;\ A = \frac{1}{2}.$$

Продифференцируем обе части равенства (1), сохраняя слагаемые, не содержащие множителя (x^2+1):

$$2x - 2 = (Dx + E)(x-1)^2 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) \cdot 2(x-1) + \ \ldots$$

Подставим сюда $x = i$:

$$2i - 2 = (Di + E)(i-1)^2 \cdot 2i - \frac{1}{2}(i-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}i + 1\right) \cdot 2(i-1),$$

или

$$2i - 2 = (Di + E) \cdot 4 + i + 1 + i + 2i - 2.$$

Отсюда

$$-2 = 4E - 1;\ 2 = 4D + 4,$$

то есть

$$E = -\frac{1}{4},\ D = -\frac{1}{2}.$$

Запишем заданный интеграл, используя найденные значения коэффициентов:

$$\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} -$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Вычислим интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$=\mathrm{arctg}x - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left| \begin{matrix} u = x;\ \mathrm{d}v = \dfrac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\ v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+1} \end{matrix} \right| =$$

$$= \mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C\,.$$

Получим:

$$\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} -$$

$$-\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{4}\frac{2x+1}{x^2+1} + C\,.$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем, до конца данного учебного пособия, символы C, C_1, C_2, ... обозначают произвольные постоянные.

2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}\,.$$

Ответ:

$$\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C.$$

1.2 Метод Остроградского

Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная функция, знаменатель которой имеет кратные корни. Тогда

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Здесь $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ – простые. Функция $Q_1(x)$ определяется равенством

$$Q_1(x)=\frac{Q(x)}{Q_2(x)},$$

$P_1(x),\ P_2(x)$ – многочлены, а дроби $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ – правильные [3, гл 2, § 20, п. 20.3].

Обычно коэффициенты многочленов $P_1(x),\ P_2(x)$ заранее неизвестны и должны быть найдены. С этой целью следует продифференцировать равенство (2). В результате получится равенство дробей, позволяющее составить систему линейных уравнений для искомых коэффициентов.

Записывая многочлены $P_1(x),\ P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами, следует задавать их степени на единицу меньше, чем степени функций $Q_1(x),\ Q_2(x)$ соответственно, например,

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)^3(x^2+1)^4(x^2+2x+2)^2}=$$

$$=\frac{P_1(x)}{(x+1)^2(x^2+1)^3(x^2+2x+2)}+\int\frac{\mathrm{Q}_1(x)\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)(x^2+2x+2)},$$

где

$$P_1(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ ... \ + A_9 x^9,$$
$$Q_1(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4$$

и $A_0, A_1, A_2, \ ... \ , A_9 \ , B_0 \ , B_1 \ , \ ... \ , \ B_4$ – постоянные.

3. Методом Остроградского вычислить интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}. \tag{3}$$

Решение.

Представим интеграл (3) согласно методу Остроградского:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{P_1(x)}{x^3+1} + \int \frac{P_2(x)}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$

Запишем многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами, одновременно представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+D}{x^3+1} + \int \left(\frac{E}{x+1} + \frac{Fx+G}{x^2-x+1} \right) \mathrm{d}x.$$

Продифференцируем правую и левую части этого равенства:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3+1) - (Ax^2+Bx+D)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} +$$
$$+ \frac{E}{x+1} + \frac{Fx+G}{x^2-x+1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравняв числители левой и правой части равенства, получим соотношение

$$1 = (2Ax+B)(x^3+1) - 3x^2(Ax^2+Bx+D) +$$
$$+(x^3+1)(x^2-x+1)E + (x^3+1)(x+1)(Fx+G),$$

или

$$1 = 2Ax^4 + Bx^3 + 2Ax + B - 3Ax^4 - 3Bx^3 - 3Dx^2 +$$
$$+(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1)E + (x^5 + x^4 + x^2 + x)F +$$
$$+(x^4 + x^3 + x + 1)G.$$

Искомые параметры удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
&E + F = 0,\\
&-A - E + F + G = 0,\\
&-2B + E + G = 0,\\
&-3D + E + F = 0,\\
&2A - E + F + G = 0,\\
&B + E + G = 1.
\end{aligned}$$

Из первого и четвертого из них следует, что $D = 0$, из второго и пятого находим $A = 0$, из третьего и шестого $B = \dfrac{1}{3}$. Остаются три уравнения, например

$$\begin{aligned}
&E + F = 0,\\
&-E + F + G = 0,\\
&-\frac{2}{3} + E + G = 0.
\end{aligned}$$

Из первого и третьего из них выразим F и G и подставим во второе:

$$F = -E,\ G = \frac{2}{3} - E,\ -E - E + \frac{2}{3} - E = 0.$$

Следовательно,

$$E = \frac{2}{9},\ F = -\frac{2}{9},\ G = \frac{4}{9}.$$

Интеграл (3) записывается в форме:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2 - x + 1} \right) \mathrm{d}x.$$

Подынтегральная функция содержит два слагаемых. Вычислим отдельно интеграл от второго из них:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2x-1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Получим интеграл (3):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| -$$
$$-\frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

или

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. Методом Остроградского вычислить интеграл

$$\int \frac{(4x^2-8x)\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Ответ.

$$\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C.$$

1.3 Интегрирование дифференциального бинома

Интеграл вида

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

называется интегралом от дифференциального бинома. Здесь $a,\ b\in\mathbb{R}$, $m,\ n,\ p\in\mathbb{Q}$ и все эти параметры, за исключением m, считаются отличными от нуля.

Сделаем замену переменной

$$x^n=t,\ x=t^{\frac{1}{n}},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t.$$

Тогда

$$I=\int t^{\frac{m}{n}}\left(a+bt\right)^p\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bt\right)^p\,\mathrm{d}t.$$

Обозначим

$$\frac{m+1}{n}-1=q\ .$$

Так как $m,\ n\in\mathbb{Q}$, то $q\in\mathbb{Q}$. Интеграл (4) примет вид:

$$I=\frac{1}{n}\int t^q\left(a+bt\right)^p\,\mathrm{d}t\ . \tag{5}$$

Если p или q целые, то он является частным случаем интеграла вида

$$\int R\left(x,\ \left(\frac{cx+d}{c_1x+d_1}\right)^{\frac{r}{s}},\ \ldots\ ,\ \left(\frac{cx+d}{c_1x+d_1}\right)^{\frac{u}{v}}\right)\mathrm{d}x\,, \tag{6}$$

где $c,\ d,\ c_1,\ d_1$ – действительные постоянные, $\frac{r}{s},\ \ldots\ ,\ \frac{u}{v}\in\mathbb{Q}$ и R – рациональная функция.

Если $p+q$ – целое число, то интеграл (5) следует записать в виде:

$$I=\frac{1}{n}\int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{p}\,\mathrm{d}t.$$

Это также частный случай интеграла (6).

5. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\ \sqrt{1+x^2}}.$$

Решение.

Так как

$$I=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x,$$

то I − интеграл от дифференциального бинома.

Введем замену переменной $x^2=t$. Предположим сначала, что $x\geq 0$. Тогда

$$x=\sqrt{t},\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$$

и

$$I=\int t^{-2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{\mathrm{t}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{5}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

Здесь $p=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z},\ q=-\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z},$ однако $p+q=-3\in\mathbb{Z}$. Поэтому запишем интеграл I в виде:

$$I=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{5}{2}}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{t^{-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t=$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t .$$

Сделаем замену переменной

$$\frac{1+t}{t} = z^2 ,\ z = \sqrt{\frac{1+t}{t}}$$

и вычислим $\mathrm{d}t$:

$$1+t = z^2 t ,\ t = \frac{1}{z^2 - 1} ,\ \mathrm{d}t = \frac{-2z}{(z^2-1)^2} \mathrm{d}z .$$

Тогда

$$I = -\int (z^2-1)^3 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z^2-1)^2} \mathrm{d}z =$$

$$= -\int (z^2 - 1)\ \mathrm{d}z = -\frac{z^3}{3} + z + C .$$

Здесь

$$z = \sqrt{\frac{1+t}{t}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} .$$

Поэтому

$$I = -\frac{1}{3x^3} \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} + \frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} + C .$$

Если считать $x < 0$, то повторение выкладок показывает, что в этом случае интеграл имеет то же значение.

6. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x .$$

Ответ:

$$\frac{3}{7} \left(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3 \right) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C .$$

1.4 Метод неопределенных коэффициентов

Если $P_n(x)$ – многочлен степени n, то интеграл

$$\int \frac{P_n(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{7}$$

может быть представлен в виде следующей суммы [3, гл. 2, § 21, п. 21.5]:

$$\int \frac{P_n(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{8}$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше, чем $n-1$, $a,\ b,\ c,\ \lambda$ – постоянные.

Продифференцируем обе части равенства (8):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+Q_{n-1}(x)\cdot\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Умножая обе части этого соотношения на общий знаменатель дробей, получим равенство многочленов

$$2P_n(x) = 2Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, можно найти коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и параметр λ.

Указанный метод может быть применен также для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $\alpha,\ k$ – постоянные, $\alpha\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$. Такие интегралы приводятся к виду (7) с помощью подстановки

$$x-\alpha=\frac{1}{t}.$$

7. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$x=\frac{1}{t},\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Тогда

$$I=-\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}+1}}=-\int\frac{t\cdot|t|\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+2}},$$

или

$$I=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+2}}$$

Представим интеграл в виде суммы:

$$\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+2}}=(At+B)\sqrt{t^2+2t+2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+2}}. \qquad (9)$$

Здесь A, B $-$ постоянные.

Продифференцируем обе части равенства (9):

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2t+2}}=A\sqrt{t^2+2t+2}+(At+B)\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2t+2}}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель дробей, то есть на $\sqrt{t^2+2t+2}$:

$$t^2=A(t^2+2t+2)+At^2+Bt+At+B+\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной t, получим систему уравнений:

$$1 = 2A,$$
$$0 = 3A + B,$$
$$0 = 2A + B + \lambda.$$

Решая ее, найдем параметры:

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{3}{2},\ \lambda = \frac{1}{2}.$$

Подставляя эти значения в равенство (9), получим:

$$I = -\operatorname{sgn} t \cdot \left(\left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \right) \sqrt{t^2 + 2t + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)^2 + 1}} \right),$$

или

$$I = -\operatorname{sgn} x \cdot \left(\left(\frac{1}{2x} - \frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2} \right| \right) + C.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \mathrm{d}x.$$

Ответ:

$$14 \arcsin \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}(3x - 19)\sqrt{3 - 2x - x^2} + C.$$

1.5 Первая подстановка Эйлера

Подстановки Эйлера применяются при вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) \mathrm{d}x, \qquad (10)$$

где R − рациональная функция, a, b, c − постоянные.

Первая подстановка используется, если $a > 0$, и определяется соотношением

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t,$$

где знаки «$+$» или «$-$» выбираются произвольно.

9. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}. \qquad \textbf{(11)}$$

Решение.

Здесь $a=1>0$. Применим первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2+x+1}=-x+t, \qquad (12)$$

то есть

$$t=x+\sqrt{x^2+x+1}.$$

Возводя обе части равенства (12) в квадрат, получим

$$x^2+x+1=x^2-2xt+t^2,$$

или

$$x+1=t^2-2xt.$$

Отсюда

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t}.$$

Вычислим дифференциал:

$$\mathrm{d}x=\frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t.$$

Подставим найденные выражения в интеграл (11):

$$I=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{D}{(1+2t)^2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравнивая числители, получим соотношение

$$t^2+t+1=A(1+4t+4t^2)+B(t+2t^2)+Dt$$

и вытекающую из него систему уравнений

$$\begin{aligned}1&=4A+2B,\\ 1&=4A+B+D,\\ 1&=A.\end{aligned}$$

Найдем ее решение

$$A=1,\ B=-\frac{3}{2},\ D=-\frac{3}{2}$$

и интеграл (11):

$$I=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+2t)^2}\right)\mathrm{d}t=$$
$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}+C,$$

или

$$I=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+$$
$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

10. С помощью первой подстановки Эйлера вычислить интеграл

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Ответ.

$$2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right)}-$$
$$-\frac{3}{2}\ln\left|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.$$

1.6 Вторая подстановка Эйлера

Если в интеграле (10) параметр $c>0$, то может быть применена вторая подстановка Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}.$$

11. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{4-2x-x^2}}. \tag{13}$$

Решение.

Применим подстановку

$$\sqrt{4-2x-x^2}=tx-2, \tag{14}$$

$$t=\frac{\sqrt{4-2x-x^2}+2}{x}$$

и возведем в квадрат обе части равенства (14):

$$4-2x-x^2=t^2x^2-4tx+4.$$

Выразим отсюда x через переменную t:

$$-2-x=t^2x-4t,$$
$$x=\frac{4t-2}{t^2+1}.$$

Вычислим дифференциал этой функции:

$$\mathrm{d}x = \frac{4(t^2+1) - 2t\cdot(4t-2)}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{-4t^2+4t+4}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\,.$$

Учитывая соотношение (14), выразим через t знаменатель подынтегральной функции:

$$x+\sqrt{4-2x-x^2} = x+tx-2 =$$
$$= x(t+1)-2 = \frac{4t-2}{t^2+1}(t+1)-2 =$$
$$= \frac{4t^2-2t+4t-2-2t^2-2}{t^2+1} = \frac{2t^2+2t-4}{t^2+1}.$$

Подставим полученные выражения в интеграл (13):

$$I = \frac{4}{2}\int \frac{(t^2+1)(-t^2+t+1)}{(t^2+t-2)(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int \frac{-t^2+t+1}{(t^2+t-2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int \frac{-t^2+t+1}{(t-1)(t+2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{-t^2+t+1}{(t-1)(t+2)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} + \frac{Dt+E}{t^2+1}\,.$$

После приведения к общему знаменателю приравняем числители левой и правой частей:

$$-t^2+t+1 = A(t+2)(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) +$$

$$+(Dt+E)(t-1)(t+2).$$

При $t=1$ получим:

$$A=\frac{1}{6};$$

при $t=-2$:

$$-5=-B\cdot 15,\ B=\frac{1}{3};$$

при $t=i$:

$$1+i+1=(Di+E)(i-1)(i+2),$$

или

$$2+i=(Di+E)(-3+i),$$
$$2+i=-D-3E+i(-3D+E),$$
$$\begin{cases}2=-D-3E,\\ 1=-3D+E.\end{cases}$$

Умножая обе части второго уравнения данной системы на 3 и складывая полученное равенство с первым из уравнений, найдем:

$$5=-10D,\ D=-\frac{1}{2}$$

и

$$E=1+3D=-\frac{1}{2}.$$

Интеграл (13) принимает вид:

$$I=2\int\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|t-1\right|+\frac{2}{3}\ln\left|t+2\right|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\mathrm{arctg}t+C,$$

или

$$I=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4-2x-x^2}+2}{x}-1\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4-2x-x^2}+2}{x}+2\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{4-2x-x^2}+2\right)^2}{x^2}+1\right|-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4-2x-x^2}+2}{x}+C.$$

12. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Ответ:

$$\ln\left|1-\frac{x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C.$$

1.7 Третья подстановка Эйлера

Если в интеграле (10) квадратичная функция ax^2+bx+c имеет действительные корни $x_1,\ x_2$, то может быть применена третья подстановка Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t.$$

13. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x-3}}. \tag{15}$$

Решение.

Поскольку справедливо разложение

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3),$$

можно применить подстановку

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = (x-1)t, \tag{16}$$

или

$$\sqrt{(x-1)(x+3)} = (x-1)t.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$(x-1)(x+3) = (x-1)^2 t^2.$$

Выразим отсюда x и вычислим его дифференциал:

$$\begin{aligned} x + 3 &= (x-1)t^2, \\ x + 3 &= xt^2 - t^2, \\ x &= \frac{t^2+3}{t^2-1} = 1 + \frac{4}{t^2-1}, \\ \mathrm{d}x &= \frac{-8t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (16), выразим знаменатель подынтегральной функции интеграла (15) через t:

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x^2+2x-3} &= 1 + (x-1)t = \\ &= 1 + \frac{4t}{t^2-1} = \frac{t^2+4t-1}{t^2-1}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в интеграл (15):

$$\begin{aligned} I &= -8\int \frac{t^2-1}{t^2+4t-1} \cdot \frac{t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t = \\ &= -8\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-1)(t^2+4t-1)}. \end{aligned}$$

Корни многочленов t^2-1 и t^2+4t-1 различны, поэтому подынтегральную функцию можно записать в форме

$$\frac{t}{(t^2-1)(t^2+4t-1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Dt+E}{t^2+4t-1}.$$

Для параметров $A,\ B,\ D,\ E$ получим соотношение

$$t=A(t+1)(t^2+4t-1)+B(t-1)(t^2+4t-1)+(Dt+E)(t^2-1). \quad (17)$$

При $t=1$ и $t=-1$ найдем:

$$A=\frac{1}{8},\ B=-\frac{1}{8}.$$

Чтобы отыскать значения остальных параметров, раскроем скобки в соотношении (17) и приравняем коэффициенты правой и левой части при одинаковых степенях переменной t, например, для второй и для третьей степени:

$$t=A(t^3+4t^2-t+t^2+4t-1)+B(t^3+4t^2-t-t^2-4t+1)+$$
$$+D(t^3-t)+E(t^2-1),$$
$$\begin{cases}0=A+B+D,\\ 0=5A+3B+E.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$D=0,\ E=-\frac{1}{4}.$$

Интеграл (15) принимает форму:

$$I=-8\int\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t+2)^2-5}\right)\mathrm{d}t=$$
$$=-\ln|t-1|+\ln|t+1|+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Согласно соотношению (16),

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1}.$$

Поэтому

$$I = -\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} - 1\right| + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} + 1\right| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} + 2 - \sqrt{5}}{\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} + 2 + \sqrt{5}}\right| + C,$$

или

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1}\right| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \left(2 - \sqrt{5}\right)(x - 1)}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \left(2 + \sqrt{5}\right)(x - 1)}\right| + C.$$

14. С помощью третьей подстановки Эйлера вычислить интеграл

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} \mathrm{d}x.$$

Ответ:

$$-\frac{1}{6(t + 1)^2} - \frac{5}{18(t + 1)} - \frac{17}{108}\ln|t + 1| + \frac{3}{4}\ln|t - 1| - \frac{16}{27}\ln|t - 2| + C,$$

где

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + 1}.$$

2 ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1 Вычисление интеграла по определению

2.1.1 Равномерное разбиение отрезка интегрирования

Из определения определенного интеграла и теоремы его существования следует, что определенный интеграл от функции, непрерывной на отрезке $[a,\ b]$, может быть вычислен по формуле

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x,$$

где

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ \ \xi_i \in \left[a+(i-1)\Delta x,\ a+i\Delta x\right],\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то есть как предел последовательности:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Например,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right). \tag{18}$$

15. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

Решение.

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(1^2+2^2+\ \ldots\ +n^2).$$

Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)n}{6}.$$

Поэтому

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

16. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x.$$

2.1.2 Неравномерное разбиение отрезка интегрирования

В некоторых случаях при вычислении определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

по определению целесообразно использовать неравномерное разбиение отрезка интегрирования, например, точки разбиения могут составлять геометрическую прогрессию.

Будем считать, что $x_0 = a,\ x_n = b,\ b = q^n a,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда знаменатель прогрессии

$$q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

и точки разбиения

$$x_i = x_0 \cdot q^i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

17. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_1^2 x^{10}\mathrm{d}x.$$

Решение.

Используем неравномерное разбиение, считая, что

$$x_i = x_0 \cdot q^i,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Здесь $x_0 = 1,\ x_n = 2$. Поэтому равенство

$$x_n = x_0 \cdot q^n$$

имеет вид

$$2 = 1 \cdot q^n$$

и

$$q = 2^{\frac{1}{n}}.$$

Выберем

$$\xi_i = x_i = x_0 q^i = 2^{\frac{i}{n}} \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Длина частичного отрезка

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = x_0 q^{i+1} - x_0 q^i = x_0 q^i (q-1),$$

или

$$\Delta x_i = 2^{\frac{i}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Применим основное соотношение, задающее определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(обозначения стандартные). Наибольшая длина частичного отрезка

$$\max \Delta x_i = 2^{\frac{n}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Поэтому

$$\int_1^2 x^{10} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{10} \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2^{\frac{i}{n}}\right)^{10} 2^{\frac{i}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{11i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \sum_{i=1}^{n} \left(2^{\frac{11}{n}}\right)^{i} .$$

В правой части содержится сумма n членов геометрической прогрессии с знаменателем $2^{\frac{11}{n}}$ и первым членом, равным $2^{\frac{11}{n}}$. Поэтому

$$\int_1^2 x^{10} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \frac{2^{\frac{11}{n}}\left(\left(2^{\frac{11}{n}}\right)^{n}-1\right)}{2^{\frac{11}{n}}-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{11}{n}}-1} \cdot 2^{\frac{11}{n}}\left(2^{11}-1\right).$$

Учтем, что при $t \to 0$

$$a^t - 1 = e^{t\ln a} - 1 \sim t \ln a .$$

Получим значение интеграла:

$$\int_1^2 x^{10}\mathrm{d}x == \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{11}{n}\ln 2} \cdot 2^{\frac{11}{n}} \left(2^{11}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{11} \cdot 2^{\frac{11}{n}} \left(2^{11}-1\right) = \frac{2^{11}-1}{11},$$

или

$$\int_1^2 x^{10}\mathrm{d}x = \frac{2047}{11}.$$

18. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_1^2 x^{8}\mathrm{d}x.$$

2.2 Вычисление предела с помощью определенного интеграла

Формулу (18) можно использовать для вычисления некоторых пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

где

$$\xi_i = a + \frac{b-a}{n} i, \ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

19. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ \ldots\ + \frac{1}{n^2+n^2}\right).$$

Решение.

Применим формулу (18) к интегралу

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ ... \ + \frac{1}{n^2+n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

20. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ ... \ + \frac{1}{n+n}\right).$$

Ответ: $\ln 2$.

Указание. Рассмотрите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

2.3 Интегралы от четных и нечетных функций

Если четная функция f интегрируема на отрезке $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

В случае если функция f нечетная,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

21. Вычислить интеграл:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos^2 x-8x\cos 3x-x^2\sin x+4x^3\cos x+x^4\cos^2 x}{x^4+2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение.

Сгруппируем четные и нечетные слагаемые в числителе подынтегральной функции и представим интеграл в виде суммы:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos^2 x+x^4\cos^2 x}{x^4+2}\,\mathrm{d}x+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-8x\cos 3x-x^2\sin x+4x^3\cos x}{x^4+2}\,\mathrm{d}x.$$

Подынтегральная функция второго из данных интегралов нечетная, этот интеграл равен нулю. Поэтому

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos^2 x+x^4\cos^2 x}{x^4+2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(2+x^4)\cos^2 x}{x^4+2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\pi.$$

22. Вычислить интеграл

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

Ответ: $-\frac{16}{5}\sqrt{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2.4 Интеграл с переменным пределом интегрирования

Теорема. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и $x\in(a,\ b)$, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x).$$

23. Вычислить предел

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t}.$$

Решение.

Учтем, что при $x\geq 0$

$$e^{t^2}\geq 1$$

и что

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t=\infty.$$

Согласно признакам сходимости несобственных интегралов, отсюда следует соотношение:

$$\int_0^{+\infty}e^{t^2}\mathrm{d}t=\infty.$$

Аналогично,

$$\int_0^{+\infty}e^{2t^2}\mathrm{d}t=\infty.$$

Таким образом, необходимо раскрыть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Применим правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{x^2}}.$$

Это также неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Еще раз используем правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

24. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x (\mathrm{arctg}t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{4}$.

2.5 Интеграл в смысле главного значения

2.5.1 Интеграл с бесконечными пределами

Определение. Пусть функция f непрерывна на интервале $(-\infty,\ +\infty)$. Если существует предел

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

то этот предел называется интегралом в смысле главного значения от функции f на указанном интервале и обозначается

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Таким образом, по определению,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

25. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{19}$$

Решение.

Рассмотрим интегралы в смысле главного значения:

$$I_1 = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{20}$$

и

$$I_2 = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{21}$$

По определению,

$$I_1 = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty} 2\int_{0}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^a = \lim_{a\to+\infty} 2\operatorname{arctg} a = \pi.$$

Аналогично,

$$I_2 = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Так как функция $\dfrac{x}{1+x^2}$ нечетная, то

$$\int_{-a}^{a} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$$

и

$$I_2 = 0.$$

Поскольку оба интеграла в смысле главного значения (20) и (21) существуют, то, по теореме о пределе суммы,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{-a}^{a} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} \right) =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi,$$

то есть интеграл в смысле главного значения (19)

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi.$$

26. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$$

Ответ. Не существует.

2.5.2 Интеграл от неограниченной функции

Определение. Пусть функция f непрерывна на множествах $[a,\ c)$, $(c,\ b]$ и не ограничена на каждом из этих промежутков. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right),$$

то этот предел называется интегралом в смысле главного значения от указанной функции на отрезке $[a,\ b]$ и обозначается

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Таким образом, по определению,

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

27. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. p.}\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}.$$

Решение.

Согласно определению интеграла в смысле главного значения,

$$\text{v. p.}\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left|\ln x\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}+\ln\left|\ln x\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{4}\right)=$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln\left|\ln(1-\varepsilon)\right| - \ln\left|\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \ln\left|\ln(4)\right| - \ln\left|\ln\left(1+\varepsilon\right)\right| \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln\left|\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}}\right| + \ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln\left(1+\varepsilon\right)}\right| \right).$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln\left(1+\varepsilon\right)} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} = -1,$$

то

$$\text{v. p.} \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln 2 + \ln\left|-1\right| = \ln 2.$$

28. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. p.} \int_{1}^{10} \frac{\mathrm{d}x}{7-x}.$$

Ответ: $\ln 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие / Г.Н. Берман – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005 – 432 с.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: АСТ : Астрель, 2005. – 558 с.
3. Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ, т. I / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. –703 с.
4. Ляшко, И.И. Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Голович. – Киев: Вища школа, 1984. – 456 с.
5. Марон, И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной: Учеб. пособие для втузов / И.А. Марон. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
6. Ривкинд, Я.И. Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах: Учеб. пособие / Я.И. Ривкинд. – Минск, Вышейшая школа, 1971. – 192 с.
7. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие для вузов/ Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин; под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1986. – 528 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ф а й н и ц к и й Юрий Львович

Интегралы
Учебное пособие

РЕДАКТОР…..

Подписано в печать…...2006 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. …… Усл. кр.-отт….. Уч.-изд. л. …...
Тираж ….. экз. Заказ Арт……...

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086 Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34