ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания

Работа подготовлена на кафедре высшей математики СГАУ в рамках инновационной программы «Развитие центра компетенции и подготовки специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

Самара 2006

Составитель: Е.П. Ростова.
УДК 517.31 (075)

Методы вычисления неопределенных интегралов: **Метод. указания/ Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Е.П. Ростова.* Самара, 2006. 45 с.**

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, а также образцы решения задач по теме «Неопределенный интеграл». Предлагаются также задачи для самостоятельной работы студентов.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей СГАУ.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики СГАУ в рамках инновационной программы «Развитие центра компетенции и подготовки специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

Табл. 1.

Печатаются по решению научно-методической комиссии института фундаментальных наук.

Рецензент: ст.преп. Карпилова О.М.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Неопределенный интеграл и первообразная 4
1.1. Определения 4
1.2. Свойства неопределенных интегралов 5
2.Основные методы вычисления неопределенного интеграла 8
2.1. Внесение под знак дифференциала 8
2.2. Замена переменной в неопределенном интеграле 10
2.3. Интегрирование по частям 12
3. Интегрирование некоторых классов элементарных функций 16
3.1. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен 16
3.2. Интегрирование рациональных дробей 22
3.3. Интегрирование тригонометрических функций 36
Приложение 43

1. Неопределенный интеграл и первообразная

1.1. Определения

Интеграл – одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а с другой – измерять площади, объемы, длины дуг, работу сил за определенный промежуток времени и т. п.

Нахождение неопределенных интегралов, или *интегрирование*, есть операция, обратная дифференцированию. При дифференцировании функции $F(x)$ ищется ее производная $f(x)$. При интегрировании, наоборот, ищется первообразная функция.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ может иметь различные первообразные, но все они отличаются друг от друга только произвольной постоянной C.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F(x)+C$ – тоже является первообразной для $f(x)$. Здесь C – произвольная постоянная.

Все первообразные для функции $f(x)$ содержатся в выражении $F(x)+C$, которое называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Нахождение первообразной для функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т. е. вдоль оси $0y$.

1.2. Свойства неопределенных интегралов

1) $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$

3) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

4) $\int df(x) = f(x) + C$

5) $\int f(a \cdot x)dx = \dfrac{1}{a}F(a \cdot x) + C$

6) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$

7) $\int f(a \cdot x + b)dx = \dfrac{1}{a}F(a \cdot x + b) + C$ (следствие из 5 и 6 свойств)

Примеры

1. Вычислить $\int \left(5x^2 + 2\sin x\right)dx$.

Решение.

Данный интеграл представим в виде суммы двух интегралов (см. свойство 1) $\int \left(5x^2 + 2\sin x\right)dx = \int 5x^2 dx + \int 2\sin x dx$, в каждом из которых вынесем за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 2) $\int 5x^2 dx + \int 2\sin x dx = 5\int x^2 dx + 2\int \sin x dx$.

Полученные в итоге интегралы являются табличными:

$$5\int x^2 dx + 2\int \sin x dx = 5\frac{x^3}{3} + 2(-\cos x) + C = \frac{5}{3}x^3 - 2\cos x + C.$$

2. Вычислить $\int (\sqrt{x} + 5^x - \sqrt[3]{x^4})dx$.

Решение.

В данном интеграле также воспользуемся свойством 1 для того, чтобы разбить изначальный интеграл на сумму трех интегралов

$\int(\sqrt{x}+5^x-\sqrt[3]{x^4})dx=\int\sqrt{x}dx+\int 5^x dx-\int\sqrt[3]{x^4}dx$. Далее запишем $\sqrt{x}=x^{1/2}$ и $\sqrt[3]{x^4}=x^{4/3}$.

Получим три табличных интеграла:

$$\int x^{1/2}dx+\int 5^x dx-\int x^{4/3}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{x^{7/3}}{7/3}+C=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{3}{7}x^{7/3}+C.$$

3. Вычислить $\int\frac{2x^3+4\cdot\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^5}}dx$.

Решение.

Подынтегральную дробь разобьем на три более простые дроби

$$\int\frac{2x^3+4\cdot\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^5}}dx=\int\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^5}}+\frac{4\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}-\frac{1}{\sqrt{x^5}}\right)dx,$$

далее полученный интеграл суммы запишем в виде суммы интегралов (см. свойство 1) $\int\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^5}}+\frac{4\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}-\frac{1}{\sqrt{x^5}}\right)dx=\int\frac{2x^3}{\sqrt{x^5}}dx+\int\frac{4\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^5}dx}$ и в каждом из них вынесем множитель-константу (см. свойство 2)

$$\int\frac{2x^3}{\sqrt{x^5}}dx+\int\frac{4\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^5}dx}=2\int\frac{x^3}{\sqrt{x^5}}dx+4\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^5}}dx.$$

Теперь преобразуем дроби, записав их в виде степенных функций

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^5}}=\frac{x^3}{x^{5/2}}=x^{3-5/2}=x^{1/2} \text{ и } \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}=\frac{x^{1/3}}{x^{5/2}}=x^{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}=x^{-13/6}.$$

Получив табличные интегралы, вычислим их:

$$2\int x^{1/2}dx+4\int x^{-13/6}dx-\int x^{-5/2}dx=2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+4\cdot\frac{x^{-7/6}}{-7/6}-\frac{x^{-3/2}}{-3/2}+C=\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{24}{7}x^{-7/6}+\frac{2}{3}x^{-3/2}+C.$$

4. Вычислить $\int(\sin(2x)+\cos(x+3))dx$.

Решение.

Так же как и в предыдущих примерах, воспользуемся свойством 1 для преобразования интеграла от суммы в сумму интегралов. Для вычисления первого из получившихся интегралов воспользуемся свойством 5, а для вычисления второго – свойством 6.

$$\int(\sin(2x)+\cos(x+3))dx=\int\sin(2x)dx+\int\cos(x+3)dx=\frac{1}{2}(-\cos(2x))+\sin(x+3)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(2x)+\sin(x+3)+C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Вычислить.

1) $\int(5x^3-2x^2+\sqrt{x^3})dx$; 2) $\int(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x^6}-5\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$; 3) $\int\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

4) $\int\frac{x^4-\sqrt[4]{x^3}}{x^3}dx$; 5) $\int\cos(4x-7)dx$; 6) $\int 2^{(x+3)}dx$; 7) $\int\frac{dx}{(x-5)^2}$; 8) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(2x+1)^2}}$;

9) $\int\frac{(x+1)^3}{x^2}dx$.

Ответы.

1) $\frac{5}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{5/2}+C$; 2) $\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{3}{4}x^4-20x^{1/4}+C$; 3) $\frac{3}{8}x^{8/3}+\frac{6}{7}x^{7/6}+C$;

4) $0{,}5x^2+0{,}8x^{-5/4}+C$; 5) $\frac{1}{4}\sin(4x-7)+C$; 6) $\frac{2^{x+3}}{\ln 2}+C$; 7) $\frac{-1}{x-5}+C$;

8) $\frac{5}{6}(2x+1)^{3/5}+C$; 9) $0{,}5x^2+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

2.Основные методы вычисления неопределенного интеграла

2.1. Внесение под знак дифференциала

Данный метод интегрирования основан на инвариантности формул интегрирования. Т.е. формулы интегрирования, приведенные в таблице интегралов действительны как для независимой переменной x, так и для некоторой функции $u=u(x)$. Например,

$\int \cos u du=\sin u+C$ или $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ и т.д. Значит, подынтегральное выражение можно преобразовать таким образом, чтобы под знаком дифференциала стояла та же функция, что и в основной подынтегральной функции. Тогда полученный интеграл можно вычислить по таблице интегрирования и с использованием свойств неопределенного интеграла. Некоторые случаи внесения под знак дифференциала можно записать следующими формулами:

$\cos x dx=d(\sin x)$; $\sin x dx=-d(\cos x)$; $e^x dx=d(e^x)$;

$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$; $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$; $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x})$.

<u>Пример</u>

1) Вычислить $\int \frac{x}{x^2+3}dx$.

Решение.

Внесем под знак дифференциала x и воспользуемся 6 свойством неопределенного интеграла.

$$\int \frac{x}{x^2+3}dx = \left[xdx = \frac{1}{2}d(x^2) \right] = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C.$$

2) Вычислить $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Решение.

Преобразуем подынтегральное выражение таким образом, чтобы под дифференциалом стал $\ln x$. Теперь можно будет пользоваться таблицей интегралов.

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x) \right] = \int \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

3) Вычислить $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx$.

Решение.

Заметим, что $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$. Выполнив это преобразование, можно воспользоваться таблицей интегралов.

$$\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx = \left[\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx) \right] = \int tg^3 x d(tgx) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Вычислить.

1) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+3}}$; 2) $\int \frac{4xdx}{x^4+1}$; 3) $\int x\sin(x^2+3)dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$;

5) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}-x}$; 6) $\int \cos x \cdot \sin^3 x dx$; 7) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$; 8) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; 9) $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Ответы.

1) $2\sqrt{x+3}+C$; 2) $2arctg(x^2)+C$; 3) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+3)+C$; 4) $2tg(\sqrt{x})+C$;

5) $-2\ln\left|4-\sqrt{x}\right|+C$; 6) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$; 7) $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$; 8) $-\frac{1}{2\ln^2 x}+C$; 9) $\ln\left|\ln x\right|+C$.

2.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Данный метод вычисления интегралов основан на введении новой переменной, благодаря которой исходный интеграл упрощается и приводится к табличному интегралу. Итак, введем новую переменную t формулой $x=g(t)$, где функция $g(t)$ дифференцируема на некотором множестве T и существует обратная к функции $g(t)$ функция $t=g^{-1}(x)$.

Теперь надо подставить $x=g(t)$ в исходное подынтегральное выражение $\int f(x)dx$. В подынтегральной функции $f(x)$ переменная x заменяется на выражение $g(t)$, а $dx=d(g(t))=g'(t)dt$. Тогда

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt}.$$

Отметим, что при интегрировании иногда удобнее подбирать замену переменной в виде $t=\varphi(x)$, а не $x=g(t)$.

В получившуюся в результате функцию, зависящую от t, вместо t подставим $g^{-1}(x)$. Функция $g^{-1}(x)$ – функция, обратная функции $g(t)$.

Примеры

1) Вычислить $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение.

Сделаем замену $t=\sqrt{x}$, т.е. $x=t^2$, тогда $dx=d(t^2)=2tdt$. Теперь в исходный интеграл вместо x запишем t^2 и вместо $\sqrt{x}$ запишем t. В получившийся результат вместо t подставим $\sqrt{x}$.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix}=\int\frac{2tdt}{t^2+t}=2\int\frac{t}{t\cdot(t+1)}dt=2\int\frac{dt}{t+1}=2\ln(t+1)+C=2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

2) Вычислить $\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

Решение.

Заменим $t=\sqrt{1-e^x}$, выразим x: $x=\ln(1-t^2)$. Тогда $dx=d(\ln(1-t^2))=\frac{-2t}{1-t^2}dt$.

$$\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx=\begin{bmatrix} t=\sqrt{1-e^x}, x=\ln(1-t^2) \\ dx=\frac{-2t}{1-t^2}dt \end{bmatrix}=\int\frac{(1-t^2)^3(-2t)}{t(1-t^2)}dt=-2\int\frac{t(1-t^2)^3}{t(1-t^2)}dt=-2\int(1-t^2)^2dt=$$

$$=-2\int(1-2t^2+t^4)dt=-2\left(\int dt-2\int t^2dt+\int t^4dt\right)=-2\int dt+4\int t^2dt-2\int t^4dt=-2\frac{t}{1}+4\frac{t^3}{3}-2\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=-2t+\frac{4}{3}t^3-\frac{2}{5}t^5+C=-2\sqrt{1-e^x}+\frac{4}{3}(1-e^x)^{3/2}-\frac{2}{5}(1-e^x)^{5/2}+C.$$

3) Вычислить $\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение.

Сделаем замену $t=\sqrt[3]{x}$, т.е. $x=t^3$. Тогда $dx=d(t^3)=3t^2dt$. После вычисления интеграла вместо переменной t подставим $\sqrt[3]{x}$.

$$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\begin{bmatrix} t=\sqrt[3]{x}, x=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{bmatrix}=\int\frac{\cos t\cdot 3t^2dt}{t^2}=3\int\cos tdt=3\sin t+C=3\sin\sqrt[3]{x}+C.$$

4) Вычислить $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

Решение.

Заменим $t=\sqrt{2x-9}$, т.е. $x=\frac{t^2+9}{2}$. Тогда $dx=d\left(\frac{t^2+9}{2}\right)=\frac{1}{2}d(t^2+9)=\frac{1}{2}\cdot 2tdt=tdt$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{2x-9},\, x=\frac{1}{2}(t^2+9) \\ dx = tdt \end{matrix} \right] = \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2+9)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3} arctg\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

5) Вычислить $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x - 4} dx$.

Решение.

Заменим $t=\cos^2 x$, тогда $dt=d(\cos^2 x)=2\cos x\cdot(-\sin x)dx$.

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x-4}dx = \int \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 -4}dx = \left[\begin{matrix} t=\cos^2 x \\ dt = -2\cos x\cdot\sin x dx \end{matrix} \right] = -\int \frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos^2 x-2}{\cos^2 x+2}\right| + C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Вычислить.

1) $\int \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}-5)}$; 3) $\int \frac{e^{x/3}}{\sqrt{16-e^{2x/3}}}dx$; 4) $\int \frac{e^{\sqrt{3x-5}}}{\sqrt{3x-5}}dx$;

5) $\int \frac{\sin 4x}{\cos^4 2x+4}dx$; 6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}dx$; 7) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+5}dx$.

Ответы.

1) $-4\cos(\sqrt[4]{x})+C$; 2) $\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^2}-5\right|+C$; 3) $3\arcsin\left(\frac{e^{x/3}}{4}\right)+C$; 4) $\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-5}}+C$;

5) $-0{,}5arctg\left(0{,}5\cos^2 2x\right)+C$; 6) $-\ln\left|\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3}\right|+C$; 7) $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}\right)+C$.

2.3. Интегрирование по частям

В методе интегрирования по частям подынтегральное выражение разбивается на два сомножителя: u и dv. Основываясь на этом разбиении, находятся функция v и дифференциал du. Далее, используется формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int vdu = uv - \int vdu}$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ должны быть дифференцируемыми.

Эта формула используется, если подынтегральное выражение можно представить в виде произведения сомножителей u и dv и получившийся интеграл $\int vdu$ вычислить проще, чем исходный $\int udv$. При этом за u берется та функция, которая при дифференцировании упростится, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен.

Например, для интегралов вида $\int P(x) \cdot e^{ax} dx$, $\int P(x) \cdot \sin axdx$, $\int P(x) \cdot \cos axdx$ за u удобнее брать многочлен $P(x)$, а за dv оставшуюся часть подынтегрального выражения: $e^{ax}dx$, $\sin(ax)dx$ и $\cos(ax)dx$ соответственно. Для интегралов вида $\int P(x) \ln xdx$, $\int P(x) \cdot \arcsin xdx$, $\int P(x) \cdot \arccos xdx$ за u принимают соответственно $\ln x$, $\arcsin x$ и $\arccos x$, а за dv – $P(x)dx$.

Примеры

1) Вычислить $\int x \cdot \sin xdx$.

Решение.

Здесь за u удобнее взять x, а за dv оставшуюся часть подынтегрального выражения: $\sin x\, dx$.

Тогда $du=dx$, а $v=\int \sin xdx = -\cos x$.

$$\int x \cdot \sin xdx = \begin{bmatrix} x = u, du = dx \\ \sin xdx = dv, v = -\cos x \end{bmatrix} = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C.$$

2) Вычислить $\int x^2 \cdot e^x dx$.

Решение.

Так же как и в предыдущем примере за u лучше взять многочлен x^2. За dv тогда принимаем $e^x dx$. Тогда $du=d(x^2)=2xdx$, $v=\int e^x dx=e^x$. В данном примере в изначальной подынтегральной функции стоял x^2 – многочлен второй степени, значит, при дифференцировании останется многочлен первой степени $2x$ и получится новый интеграл $\int xe^x dx$.

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \begin{bmatrix} x^2 = u, du = 2xdx \\ e^x dx = dv, v = e^x \end{bmatrix} = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2xdx .$$

Полученный интеграл тоже вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям. За u снова берется многочлен, но теперь уже первой степени x, а за dv снова $e^x dx$. И тогда $du=dx$, а $v=\int e^x dx=e^x$.

$$x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2xdx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx = \begin{bmatrix} x = u, du = dx \\ e^x dx = dv, v = e^x \end{bmatrix} = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x dx\right) =$$
$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

3) Вычислить $\int \ln x dx$.

Решение.

В данном примере подынтегральная функция содержит только $\ln x$, который принимаем за u. Тогда за dv берем dx. Значит $du=d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$, $v=\int dx=x$.

$$\int \ln x dx = \begin{bmatrix} \ln x = u, du = \dfrac{dx}{x} \\ dx = dv, v = x \end{bmatrix} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C .$$

4) Вычислить $\int e^x \cdot \sin x dx$.

Решение.

В данном примере, в отличие от других, рассмотренных выше нельзя сказать, что разбиение подынтегрального выражения на u и dv очевидно. Если за u

взять e^x, а $dv=\sin x\,dx$, то $du=e^x dx$, $v=\int \sin xdx = -\cos x$. Если же за u принять $\sin x$, а за $dv=e^x dx$, тогда $du=\cos x\,dx$, $v=\int e^x dx = e^x$. В любом из рассмотренных случаев интеграл, полученный в результате применения формулы интегрирования по частям, не проще исходного, а за dv можно брать любую часть подынтегрального выражения, потому что интеграл $\int dv = v$ будет найден и для e^x и для $\sin x$. Значит можно выбрать любой из способов разбиения данного интеграла на u и dv.

$$\int e^x \cdot \sin xdx = \begin{bmatrix} e^x = u, du = e^x dx \\ \sin xdx = dv, v = -\cos x \end{bmatrix} = e^x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot e^x dx = \begin{bmatrix} e^x = u, du = e^x dx \\ \cos xdx = dv, v = \sin x \end{bmatrix} =$$
$$= -e^x \cdot \cos x + (e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx) = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx$$

Итак, в ходе решения был получен исходный интеграл, который мы вычисляем $\int e^x \sin xdx$ Если перенести его в правую часть, то справа получится $2\int e^x \sin xdx$, а слева некоторая функция.

$$2\int e^x \cdot \sin xdx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x .$$

Поделим левую и правую части на 2, прибавим постоянную интегрирования С и получим ответ: $\int e^x \cdot \sin xdx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$.

Интегралы подобного вида называются циклическими, потому что в ходе решения приходят к тому, от чего уходили, т.е. прошли по кругу, сделали цикл.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int x \cdot \cos xdx$; 2) $\int (x+1)e^x dx$; 3) $\int x \ln xdx$; 4) $\int x^2 arctgxdx$;

5) $\int x^2 \cdot \sin xdx$; 6) $\int (x^2 + 2x + 3)\cos xdx$; 7) $\int x^5 e^{x^2} dx$; 8) $\int e^{2x} \cos xdx$.

Ответы.

1) $x\sin x+\cos x+C$; 2) xe^x+C; 3) $0{,}5x^2(\ln x-0{,}5)+C$;

4) $\frac{x^3}{3}arctgx-\frac{1}{6}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+C$; 5) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$;

6) $(x^2+2x+1)\sin x+2(x+1)\cos x+C$; 7) $e^{x^2}(0{,}5x^4-x^2+1)+C$;

8) $\frac{1}{3}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$.

3. Интегрирование некоторых классов элементарных функций

3.1. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен

Квадратный трехчлен – это сумма вида ax^2+bx+c, где a, b, c – постоянные величины, константы, а x – это переменная.

1° Рассмотрим сначала интегрирование дробей вида $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$, где $b^2-4ac<0$.

Интеграл от таких дробей вычисляется следующим образом.

1) В выражении, стоящем в знаменателе выделяем полный квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right].$$

2) Делаем замену $t=x+\frac{b}{2a}$, тогда $x=t-\frac{b}{2a}$ и $dx=dt$.

3) Также для краткости можно обозначить выражение $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=q^2$.

4) Подставляем новую переменную в подынтегральное выражение:

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\left[\begin{matrix} t=x+\frac{b}{2a} \\ x=t-\frac{b}{2a}, dx=dt\end{matrix}\right]=\int\frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{a(t^2+q^2)}dt.$$

5) В числителе раскрываем скобки, а в знаменателе выносим множитель за знак интеграла: $\int \frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{a(t^2+q^2)}dt = \frac{1}{a}\int \frac{Mt - M\frac{b}{2a}+N}{t^2+q^2}dt$.

6) Далее разбиваем дробь $\frac{Mt - M\frac{b}{2a}+N}{t^2+q^2}$ на сумму двух дробей

$\frac{Mt - M\frac{b}{2a}+N}{t^2+q^2} = \frac{Mt}{t^2+q^2} + \frac{N - M\frac{b}{2a}}{t^2+q^2}$ и получаем два интеграла:

$\frac{1}{a}\int \frac{Mt}{t^2+q^2}dt + \frac{1}{a}\int \frac{N - M\frac{b}{2a}}{t^2+q^2}dt$.

7) В первом интеграле вносим в числителе t под знак дифференциала $Mtdt{=}\frac{1}{2}Mdt^2$ и получаем табличный интеграл:

$$\frac{1}{a}\int \frac{Mt}{t^2+q^2}dt = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{2}M}{t^2+q^2}dt^2 = \frac{M}{2a}\int \frac{dt^2}{t^2+q^2} = \frac{M}{2a}\ln\left|t^2+q^2\right| + C.$$

8) Второй интеграл уже является табличным

$$\frac{1}{a}\int \frac{N - M\frac{b}{2a}}{t^2+q^2}dt = \frac{N - M\frac{b}{2a}}{a}\int \frac{dt}{t^2+q^2} = \frac{N - M\frac{b}{2a}}{a}\cdot\frac{1}{q}arctg\left(\frac{t}{q}\right) + C.$$

9) Возвращаемся к изначальной переменной x и пользуемся той же заменой $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}{=}q^2$: $\frac{M}{2a}\ln\left|t^2+q^2\right| + \frac{N - M\frac{b}{2a}}{a}\cdot\frac{1}{q}arctg\left(\frac{t}{q}\right) + C =$

$$= \frac{M}{2a}\ln\left|x^2+\frac{bx+c}{a}\right| + \frac{N - M\frac{b}{2a}}{a\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}arctg\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right) + C.$$

<u>Пример</u>

1) Вычислить $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$.

Решение.

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2-2x+2=(x^2-2\cdot1\cdot x+1)-1+2=(x-1)^2+1.$$

Сделаем замену $t=x-1$, тогда $x=t+1$, $dx=dt$.

$$\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx=\begin{bmatrix} t=x-1 \\ x=t+1, dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{2(t+1)-2}{t^2+1}dt.$$

Раскроем в числителе скобки $\int\frac{2(t+1)-2}{t^2+1}dt=\int\frac{2t}{t^2+1}dt$ и внесем $2t$ под знак дифференциала $\int\frac{2t}{t^2+1}dt=\int\frac{dt^2}{t^2+1}$. Получим табличный интеграл $\int\frac{dt^2}{t^2+1}=\ln\left|t^2+1\right|+C.$ Далее используем замену $t=x-1$:

$\ln\left|t^2+1\right|+C=\ln\left|x^2-2x+2\right|+C.$

2) Вычислить $\int\frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx$.

Решение.

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2+4x+5=(x^2+2\cdot2\cdot x+4)-4+5=(x+2)^2+1.$$

Сделаем замену: $t=x+2$, тогда $x=t-2$, $dx=dt$.

$\int\frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx=\begin{bmatrix} t=x+2 \\ x=t-2, dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{3(t-2)-1}{t^2+1}dt$. Раскроем в числителе скобки: $\int\frac{3(t-2)-1}{t^2+1}dt=\int\frac{3t-6-1}{t^2+1}dt=\int\frac{3t-7}{t^2+1}dt.$ Разобьем дробь на разность двух дробей и получим два интеграла: $\int\frac{3t-7}{t^2+1}dt=\int\left(\frac{3t}{t^2+1}-\frac{7}{t^2+1}\right)dt=3\int\frac{t}{t^2+1}dt-7\int\frac{dt}{t^2+1}$. В первом интеграле внесем под знак дифференциала $tdt=\frac{1}{2}dt^2$, а второй интеграл уже табличный: $3\int\frac{t}{t^2+1}dt-7\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\int\frac{dt^2}{t^2+1}-7\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right|-7arctg(t)+C$. Вернемся к изначальной переменной x:

$\frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right|-7arctg(t)+C=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-7arctg(x+2)+C.$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx$; 2) $\int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx$; 3) $\int \frac{2x-5}{x^2+4x+5}dx$; 4) $\int \frac{x+1}{3x^2+6x+2}dx$;

5) $\int \frac{x+2}{3x^2+6x+2}dx$; 6) $\int \frac{3x+3}{2x^2-x-1}dx$; 7) $\int \frac{5x-1}{x^2-3x+5}dx$.

Ответы.

1) $\ln\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right|+C$; 2) $\ln\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right|+arctg(2x+1)+C$;

3) $\ln\left|x^2+4x+5\right|-9arctg(x+2)+C$; 4) $\frac{1}{6}\ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right|+C$;

5) $\frac{1}{6}\ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}x+\sqrt{3})+C$;

6) $\frac{3}{4}\ln\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|-\frac{5}{2}arctg\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)+C$;

7) $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-3x+5\right|+\frac{13}{\sqrt{11}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{11}}x-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+C$.

2° Теперь рассмотрим интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Принцип его решения похож на рассмотренный выше.

1) В подкоренном выражении знаменателя выделяем полный квадрат: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$.

2) Делаем замену $t=x+\frac{b}{2a}$, тогда $x=t-\frac{b}{2a}$ и $dx=dt$.

3) Также для краткости можно обозначить выражение $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=q^2$.

4) Подставляем новую переменную в подынтегральное выражение:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\left[\begin{array}{c} t=x+\frac{b}{2a} \\ x=t-\frac{b}{2a}, dx=dt \end{array}\right]=\int \frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{\sqrt{a(t^2+q^2)}}dt.$$

5) В числителе раскрываем скобки, а в знаменателе выносим множитель за знак интеграла: $\int \frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{\sqrt{a(t^2+q^2)}}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Mt-M\frac{b}{2a}+N}{\sqrt{t^2+q^2}}dt$.

6) Далее разбиваем дробь $\frac{Mt-M\frac{b}{2a}+N}{\sqrt{t^2+q^2}}$ на сумму двух дробей

$\frac{Mt-M\frac{b}{2a}+N}{\sqrt{t^2+q^2}} = \frac{Mt}{\sqrt{t^2+q^2}} + \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{t^2+q^2}}$ и получаем два интеграла:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Mt}{\sqrt{t^2+q^2}}dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{t^2+q^2}}dt.$$

7) В первом интеграле вносим в числителе t под знак дифференциала $Mtdt=\frac{1}{2}Mdt^2$ и получаем табличный интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Mt}{\sqrt{t^2+q^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\frac{1}{2}M}{\sqrt{t^2+q^2}}dt^2 = \frac{M}{2\sqrt{a}}\int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+q^2}} = \frac{M}{2\sqrt{a}}\int \left(t^2+q^2\right)^{-1/2}dt = \frac{M}{\sqrt{a}}\left(t^2+q^2\right)^{1/2} + C.$$

8) Второй интеграл уже является табличным

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{t^2+q^2}}dt = \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+q^2}} = \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{a}}\cdot \ln\left|t+\sqrt{t^2+q^2}\right| + C.$$

9) Возвращаемся к изначальной переменной x и пользуемся той же заменой $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=q^2$: $\frac{M}{\sqrt{a}}\left(t^2+q^2\right)^{1/2} + \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{a}}\cdot \ln\left|t+\sqrt{t^2+q^2}\right| + C =$

$$= \frac{M}{\sqrt{a}}\sqrt{x^2+\frac{bx+c}{a}} + \frac{N-M\frac{b}{2a}}{\sqrt{a}}\cdot \ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{bx+c}{a}}\right| + C.$$

Пример

1) Вычислить $\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$.

Решение.

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$x^2 – 2x + 2 = (x^2 – 2\cdot 1\cdot x + 1) – 1 + 2 = (x – 1)^2 + 1.$

Сделаем замену: $t = x – 1$, тогда $x = t+1$, $dx = dt$.

$$\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \left[\begin{array}{c} t = x-1 \\ x = t+1, dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{2(t+1)-2}{\sqrt{t^2+1}}dt.$$

В числителе раскроем скобки: $\int \frac{2(t+1)-2}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt$ и внесем t под знак дифференциала $\int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+1}}$. Получили табличный интеграл $\int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+1}} = \int \left(t^2+1\right)^{-1/2}dt^2 = 2\cdot\left(t^2+1\right)^{1/2} + C.$ Вернемся к переменной x:

$2\cdot\left(t^2+1\right)^{1/2} + C = 2\cdot\left(x^2-2x+2\right)^{1/2} + C = 2\cdot\sqrt{x^2-2x+2} + C.$

2) Вычислить $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$.

Решение.

В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$$x^2 + 3x + 5 = (x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 5 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4}.$$

Сделаем замену: $t = x + \frac{3}{2}$, тогда $x = t - \frac{3}{2}$, $dx = dt$.

$\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx = \left[\begin{array}{c} t = x+\frac{3}{2} \\ x = t-\frac{3}{2}, dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{2\left(t-\frac{3}{2}\right)-4}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}dt$. В числителе раскроем скобки $\int \frac{2\left(t-\frac{3}{2}\right)-4}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}dt = \int \frac{2t-7}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}dt$ и разобьем интеграл на разность

$$\int \frac{2t-7}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}dt = \int \left(\frac{2t}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}} - \frac{7}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}\right)dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}dt - 7\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}.$$

В первом интеграле внесем под знак дифференциала t:

$\int \frac{2t}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}dt = \int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}}$ и получим табличный интеграл

$$\int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}} = \int \left(t^2+\frac{11}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dt^2 = 2\cdot\left(t^2+\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + C = 2\cdot\sqrt{t^2+\frac{11}{4}} + C.$$

Второй интеграл табличный $7\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}} = 7\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}\right| + C.$ Перейдем к исходной переменной:

$$2\cdot\sqrt{t^2+\frac{11}{4}} - 7\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{11}{4}}\right| + C = 2\cdot\sqrt{x^2+3x+5} - 7\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right| + C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Вычислить.

1) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$; 2) $\int \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-x+1}}dx$; 3) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{3x^2-5x+3}}dx$;

4) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$.

Ответы.

1) $\sqrt{x^2+3x+5}+C$; 2) $2\sqrt{2x^2-x+1}+\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2x^2-x+1}\right|+C$;

3) $\frac{4}{3}\sqrt{3x^2-5x+3}+2\sqrt{3}\ln\left|\sqrt{3}x-\frac{5}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3x^2-5x+3}\right|+C$;

4) $3\sqrt{x^2-2x+3}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$.

3.2. Интегрирование рациональных дробей

В этом разделе рассмотрим интегрирование дробей, в числителе и знаменателе которых находятся многочлены n-ой степени $P_n(x)$ и m-ой степени $Q_m(x)$: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Многочлен $P_n(x)$ называется многочленом n-ой степени, если

$$P_n(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n, \text{ где } a_k \in R.$$

Интегрирование рациональных дробей состоит из двух этапов:

1) определяем является ли дробь правильной (если $n < m$) или неправильной (если $n \geq m$). Если дробь неправильная, нужно выделить целую часть, например, путем деления числителя на знаменатель. В результате должна получиться целая часть и правильная дробь, у которой степень числителя будет меньше степени знаменателя. Интегрирование целой части не составляет труда, а интегрирование правильной дроби описано во втором этапе.

2) правильную дробь, раскладываем на сумму простейших дробей. Далее интеграл от полученной суммы вычисляется как сумма интегралов от каждой из простейших дробей.

Простейшие дроби – это дроби вида $\dfrac{A}{x-a}; \dfrac{A}{(x-a)^k}; \dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}; \dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$.

Разложение правильной дроби на простейшие.

1° Пусть многочлен в знаменателе $Q_m(x)$ имеет m различных действительных корней: $x_1=b_1$, $x_2=b_2$, ... $x_m=b_m$. Тогда можно записать

$$Q_m(x)=(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdot\ldots\cdot(x-b_m).$$

Дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ запишем в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)} = \frac{A}{x-b_1} + \frac{B}{x-b_2} + \frac{C}{x-b_3} + \ldots + \frac{K}{x-b_m},$$

где $A, B, C, \ldots, K$ – неопределенные коэффициенты.

Чтобы определить значения коэффициентов $A, B, C, \ldots, K$, надо:

1) сумму дробей $\frac{A}{x-b_1}+\frac{B}{x-b_2}+\frac{C}{x-b_3}+\ldots+\frac{K}{x-b_m}$ привести к общему знаменателю, и упростить числитель, раскрыв скобки и приводя подобные. В результате получим дробь, равную исходной $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

2) Коэффициенты, стоящие в числителе $P_n(x)$ и полученные в числителе новой дроби при соответствующих степенях x должны быть равны. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителе полученной дроби и в многочлене $P_n(x)$. Эти равенства записываем в систему.

3) Решение данной системы и будут искомые коэффициенты $A, B, C, \ldots, K$.

Далее записываем полученные числа в числители простейших дробей и под интегралом вместо правильной дроби получаем сумму простейших дробей, интегралы от которых известны.

$$\int\left(\frac{A}{x-b_1}+\frac{B}{x-b_2}+\frac{C}{x-b_3}+\ldots+\frac{K}{x-b_m}\right)dx = A\int\frac{dx}{x-b_1}+B\int\frac{dx}{x-b_2}+C\int\frac{dx}{x-b_3}+\ldots+K\int\frac{dx}{x-b_m}=$$

$$= A\ln|x-b_1|+Bn|x-b_2|+Cn|x-b_3|+\ldots+Kn|x-b_m|+C.$$

<u>Пример</u>

1) Вычислить $\int\frac{2x^3+3}{x^2-x-6}dx$.

Решение.

В числителе стоит многочлен третьей степени, а в знаменателе – второй степени. Значит, дробь неправильная, и надо выделить целую часть путем деления.

$\frac{2x^3+3}{x^2-x-6}=2x+2+\frac{4x-9}{x^2-x-6}$. Получили целую часть: $2x+2$ и правильную дробь: $\frac{4x-9}{x^2-x-6}$. Теперь надо разложить правильную дробь на простейшие. Для этого найдем корни многочлена, стоящего в знаменателе, т.е. решим уравнение: $x^2 - x - 6=0$.

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

находятся по следующей формуле: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Получаем следующие корни: $x_1=3$, $x_2=-2$. Значит $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$, т.е. $\frac{4x-9}{x^2-x-6}=\frac{4x-9}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$. Полученные простейшие дроби $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$ приведем к общему знаменателю, раскроем в числителе скобки и сгруппируем слагаемые по степеням x.

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{Ax+2A+Bx-3B}{x^2-x-6}=\frac{x(A+B)+(2A-3B)}{x^2-x-6}$$

Полученная дробь должна быть равна дроби $\frac{4x-9}{x^2-x-6}$. Знаменатели у них равны, поэтому надо добиться равенства числителей: $4x-9=x(A+B)+(2A-3B)$. Приравняем коэффициенты при x и свободные члены (без x) и запишем полученные равенства в виде системы:

$$\begin{cases} 4=A+B \\ -9=2A-3B \end{cases}$$

Решив систему, получим ответ $A=\frac{21}{5}$, $B=-\frac{1}{5}$. Далее подставляем полученные числа в простейшие дроби: $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{21/5}{x-3}+\frac{-1/5}{x+2}$ и вычисляем полученный интеграл.

$$\int\frac{2x^3+3}{x^2-x-6}dx=\int\left(2x+2+\frac{4x-9}{x^2-x-6}\right)dx=2\int xdx+2\int dx+\int\frac{4x-9}{x^2-x-6}dx=$$

$$=2\int xdx+2\int dx+\int\left(\frac{21/5}{x-3}+\frac{-1/5}{x+2}\right)dx=2\int xdx+2\int dx+\frac{21}{5}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=2\frac{x^2}{2}+2x+\frac{21}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|+C=x^2+2x+\ln\left|\frac{(x-3)^{21/5}}{(x+2)^{1/5}}\right|+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int \frac{x+1}{x^2+3x+2}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+x-6}dx$; 3) $\int \frac{x^2+2}{x^2+9x+20}dx$;

4) $\int \frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-3)(x+2)}dx$; 5) $\int \frac{x^2+3x-5}{x^3-4x}dx$; 6) $\int \frac{x^5+x^3-5}{4x^3-x}dx$;

7) $\int \frac{2x^4+3x^3+1}{x^3-3x^2-6x+8}dx$.

Ответы.

1) $\ln|x+2|+C$; 2) $\ln\left|\sqrt[5]{\frac{x-2}{x+3}}\right|+C$; 3) $x+\ln\left|\frac{(x+4)^{18}}{(x+5)^{27}}\right|+C$; 4) $\ln\left|\frac{(x-3)^{2/5}}{(x+1)(x+2)^{8/5}}\right|+C$;

5) $\ln\left|\frac{x^{5/4}(x-2)^{5/8}}{(x+2)^{7/8}}\right|+C$; 6) $\frac{x^3}{12}+\frac{5}{16}x+5\ln|x|+\frac{155}{64}\ln|2x-1|+\frac{165}{64}\ln|2x+1|+C$;

7) $x^2+9x+38\ln|x-1|-23{,}5\ln|x+2|+24{,}5\ln|x-4|+C$.

2° Пусть многочлен в знаменателе $Q_m(x)$ имеет действительные кратные (т.е. повторяющиеся) корни:

$x_1=x_2=\ldots=x_k=b_1,\ x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_l=b_2,\ \ldots\ x_{m-j}=\ldots=x_{m-2}=x_{m-1}=b_i.$

Тогда можно записать

$Q_m(x)=(x-b_1)^k(x-b_2)^{l-k}\cdot\ldots\cdot(x-b_i)^j$.

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ запишем в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-b_1)^k(x-b_2)^l\cdot\ldots\cdot(x-b_i)^j}=\frac{A_1}{x-b_1}+\frac{A_2}{(x-b_1)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-b_1)^k}+$$

$$+\frac{B_1}{x-b_2}+\frac{B_2}{(x-b_2)^2}+\ldots+\frac{B_{l-k}}{(x-b_2)^l}+\ldots+\frac{K_1}{x-b_i}+\frac{K_2}{(x-b_i)^2}+\ldots+\frac{K_j}{(x-b_i)^j}$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, \ldots, K_1, K_2, \ldots, K_j$ определяются так же, как и в предыдущем случае (см 1° пункты 1) – 3)). Следует лишь отметить, что в данном случае общий знаменатель суммы простейших дробей – это знаменатель исходной дроби, т. е. многочлен

$$Q_m(x)=(x-b_1)^k\,(x-b_2)^{l-k}\cdot\ldots\cdot(x-b_i)^j .$$

Пример

1) Вычислить $\int \frac{6x-9}{(x+1)^2x^3}dx$.

Решение.

Дробь, стоящая под интегралом – правильная, т. к. в числителе стоит многочлен первого, а в знаменателе пятого порядка. Значит, раскладываем ее на простейшие дроби. Запишем исходную дробь как сумму простейших дробей:

$$\frac{6x-9}{(x+1)^2x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x^3}.$$

Полученные дроби приведем к общему знаменателю

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x^3}=\frac{A(x+1)x^3+Bx^3+C(x+1)^2x^2+D(x+1)^2x+E(x+1)^2}{(x+1)^2x^3}.$$

В числителе раскроем скобки

$$\frac{A(x+1)x^3+Bx^3+C(x+1)^2x^2+D(x+1)^2x+E(x+1)^2}{(x+1)^2x^3}=$$

$$=\frac{Ax^4+Ax^3+Bx^3+Cx^4+2Cx^3+Cx^2+Dx^3+2Dx^2+Dx+Ex^2+2Ex+E}{(x+1)^2x^3}.$$

Приведем подобные

$$\frac{Ax^4+Ax^3+Bx^3+Cx^4+2Cx^3+Cx^2+Dx^3+2Dx^2+Dx+Ex^2+2Ex+E}{(x+1)^2x^3}=$$

$$=\frac{x^4(A+C)+x^3(A+B+2C+D)+x^2(C+2D+E)+x(D+2E)+E}{(x+1)^2x^3}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в полученном числителе $x^4(A+C)+x^3(A+B+2C+D)+x^2(C+2D+E)+x(D+2E)+E$ и коэффициенты исходного числителя $6x-9$. Полученные равенства запишем в систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ A+B+2C+D=0, \\ C+2D+E=0, \\ D+2E=6, \\ E=-9. \end{cases}$$

В исходном числителе слагаемые x^4, x^3 и x^2 отсутствовали, это означает, что коэффициенты при них были равны 0. Запишем систему равенств коэффициентов при соответствующих степенях.

Решив систему, получим: $A=-39, B=15, C=39, D=24, E=-9.$

Запишем полученные числа в простейшие дроби:

$\frac{-39}{x+1}+\frac{15}{(x+1)^2}+\frac{39}{x}+\frac{24}{x^2}-\frac{9}{x^3}$.

Проинтегрируем получившуюся сумму.

$$\int \frac{6x-9}{(x+1)^2(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{-39}{x+1}+\frac{15}{(x+1)^2}+\frac{39}{x}+\frac{24}{x^2}-\frac{9}{x^3}\right)dx=$$

$$=-39\int\frac{dx}{x+1}+15\int(x+1)^{-2}dx+39\int\frac{dx}{x}+24\int x^{-2}dx-9\int x^{-3}dx=$$

$$=-39\ln|x+1|-15(x+1)^{-1}+39\ln|x|-24x^{-1}+4{,}5x^{-2}+C=\ln\left|\left(\frac{x}{x+1}\right)^{39}\right|-\frac{15}{x+1}-\frac{24}{x}+\frac{9}{2x^2}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$; 2) $\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$; 3) $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

4) $\int\frac{3x+5}{(x^2-3x+2)^2}dx$; 5) $\int\frac{x^4+3x^2+5}{x^3+3x^2+3x+1}dx$; 6) $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx$;

7) $\int\frac{3x-2}{(x^2+4x-5)^2}dx$.

Ответы.

1) $\ln\left|\frac{x^2}{(x+1)}\right|+\frac{6}{x+1}+C$; 2) $\ln\left|\frac{x^4}{(x-1)^3}\right|-\frac{9}{x-1}+C$;

3) $\ln\left|\sqrt[9]{(x-1)^{20}(x+2)^7}\right|-\frac{12}{9(x-1)}+C$; 4) $\ln\left|\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{43}\right|-\frac{20}{x-1}+\frac{63}{x-2}+C$;

5) $\frac{x^2}{2}-3x+8\ln|x+1|+\frac{7}{x+1}-\frac{7}{2(x+1)^{-2}}+C$; 6) $\ln\left|\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{3}{x+1}+C$;

7) $\frac{2}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{17}{36}\cdot\frac{1}{x+5}+C$.

3° Пусть многочлен в знаменателе $Q_m(x)$ имеет различные комплексные корни, т.е раскладывается на произведение многочленов, каждый из которых не имеет действительных корней. Тогда

$Q_m(x)=(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\ldots\cdot(c_0x^2+c_1x+c_2)$.

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ запишем в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\ldots\cdot(c_0x^2+c_1x+c_2)}=$$

$$=\frac{A_1x+A_2}{a_0x^2+a_1x+a_2}+\frac{B_1x+B_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}+\ldots+\frac{C_1x+C_2}{c_0x^2+c_1x+c_2}.$$

В числителе простейших дробей стоят многочлены, степень которых на 1 ниже, чем степень знаменателя.

Коэффициенты A_1, A_2,, B_1, B_2 ,B_3, ... ,C_1, C_2 определяются также, как и в раньше (см 1° пункты 1) – 3)) . В данном случае общим знаменателем будет многочлен $Q_m(x)=(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\ldots\cdot(c_0x^2+c_1x+c_2)$.

Пример

1) Вычислить $\int\frac{2x^2+7x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx$.

Решение.

Многочлены в знаменателе не имеют действительных корней. Запишем подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:

$\frac{2x^2+7x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+1}+\frac{B_1x+B_2}{x^2+2x+2}$. Полученные дроби приведем к общему знаменателю: $\frac{A_1x+A_2}{x^2+1}+\frac{B_1x+B_2}{x^2+2x+2}=\frac{(A_1x+A_2)(x^2+2x+2)+(B_1x+B_2)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$. В числителе раскроем скобки: $\frac{(A_1x+A_2)(x^2+2x+2)+(B_1x+B_2)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=$

$$=\frac{A_1x^3+2A_1x^2+2A_1x+A_2x^2+2A_2x+2A_2+B_1x^3+B_1x+B_2x^2+B_2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$. Приведем подобные $\frac{A_1x^3+2A_1x^2+2A_1x+A_2x^2+2A_2x+2A_2+B_1x^3+B_1x+B_2x^2+B_2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=$

$$=\frac{x^3(A_1+B_1)+x^2(2A_1+A_2+B_2)+x(2A_1+2A_2+B_1)+(2A_2+B_2)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

Далее как и в предыдущих примерах запишем систему уравнений для коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2.

$$\begin{cases} A_1+B_1=0,\\ 2A_1+A_2+B_2=2,\\ 2A_1+2A_2+B_1=7,\\ 2A_2+B_2=8. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $A_1=-1$, $A_2=4$, $B_1=1$, $B_2=0$.

Теперь запишем получившиеся дроби в подынтегральное выражение $\int\left(\frac{-x+4}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+x+2}\right)dx.$ Первую дробь $\frac{-x+4}{x^2+1}$ разбиваем на два слагаемых, для того, чтобы в первом из них внести x под знак дифференциала, а второе дало табличный интеграл.

$$\int\frac{-x+4}{x^2+1}dx=\int\left(\frac{-x}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=-\int\frac{xdx}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+4arctg(x)+C.$$

Вторую дробь интегрируем как дробь, содержащую квадратный трехчлен (см. 1.6).

$$\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx=\left[\begin{matrix} t=x+1\\ x=t-1, dx=dt\end{matrix}\right]=\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=\int\frac{tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-arctg(t)+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)-arctg(x+1)+C.$$ Осталось сложить полученные результаты

$$\int \frac{2x^2+7x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 4arctgx + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - arctg(x+1) + C .$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; 3) $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}$; 4) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$; 5) $\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)(x^2-x+2)}dx$;

6) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; 7) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$; 8) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^2-3x+4}dx$; 9) $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

Ответы.

1) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$; 2) $\ln\left|\sqrt[6]{\frac{x^2}{x^2+x+1}}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

3) $\ln\left|\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\right| + \frac{1}{2}arctg(x) + C$; 4) $\ln\left|\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}\right| + \frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$;

5) $\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln\left|x^2-x+2\right| - \frac{\sqrt{7}}{14}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + C$; 6) $\ln\left|\sqrt[4]{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$;

7) $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln\left|x^2+2x+2\right| - 2arctg(x+1) + C$;

8) $3x + \frac{11}{2}\ln\left|x^2-3x+4\right| + \frac{11}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{2x-3}{\sqrt{7}}\right) + C$;

9) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}\right| + \frac{5}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

4° Пусть многочлен в знаменателе $Q_m(x)$ имеет кратные (повторяющиеся) комплексные корни, т.е раскладывается на многочлены, которые могут повторяться.

$Q_m(x)=(a_0x^2+a_1x+a_2)^k\cdot(b_0x^2+b_1x+b_2)^l\cdot\ldots\cdot(c_0x^2+c_1x+c_2)^j,\ k+l+\ldots+j=m.$

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ запишем в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_0x^2+a_1x+a_2)^k(b_0x^2+b_1x+b_2)^l\cdot\ldots\cdot(c_0x^2+c_1x+.c_2)^j} =$$

$$= \frac{A_1x + A_2}{a_0x^2 + a_1x + a_2} + \frac{A_3x + A_4}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2} + ... + \frac{A_{2k-1}x + A_{2k}}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^k} +$$
$$+ \frac{B_1x + B_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2} + \frac{B_3x + B_4}{(b_0x^2 + b_1x + b_2)^2} + ... + \frac{B_{2l-1}x + B_{2l}}{(b_0x^2 + b_1x + b_2)^l} + ... +$$
$$+ \frac{C_1x + C_2}{c_0x^2 + c_1x + c_2} + \frac{C_3x + C_4}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^2} + ... + \frac{C_{2j-1}x + C_{2j}}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^j}.$$

Коэффициенты $A_1, A_2,... ,A_{2k}$, $B_1, B_2 ,B_3, ...B_{2l}$,$C_1, C_2, ... , C_{2j}$ определяются так же, как и в рассмотренных выше случаях.

В результате разбиения на простейшие дроби может появиться дробь вида $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}$. Интегрирование такой дроби выше не рассматривалось.

Вычисление интеграла от дроби вида $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}$.

1) Выделим в знаменателе полный квадрат выражения, стоящего в скобках: $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{4a^2}\right)\right]$.

2) Сделаем замену $t = x+\frac{b}{2a}$, тогда $x = t-\frac{b}{2a}$ и $dx=dt$. Обозначим для краткости $\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{4a^2}\right) = q^2$.

3) Подставим замену в подынтегральное выражение:

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \left[\begin{array}{c} t = x+\frac{b}{2a} \\ x = t-\frac{b}{2a}, dx = dt \end{array}\right] = \frac{1}{a}\int\frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{(t^2+q^2)^k}dt = \frac{1}{a}\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{(t^2+q^2)^k}$$

Также для более удобного восприятия обозначим $\left(N-\frac{Mb}{2a}\right) = K$.

4) Получившийся интеграл распишем как сумму интегралов $\int\frac{Mt+K}{(t^2+q^2)^k}dt = M\int\frac{t}{(t^2+q^2)^k}dt + K\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^k}$.

5) В первом интеграле в результате внесения t под знак дифференциала, получим табличный интеграл

$$\int\frac{t}{(t^2+q^2)^k}dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{(t^2+q^2)^k} = \frac{1}{2}\int(t^2+q^2)^{-k}d(t^2+q^2) = \frac{1}{2}\frac{(t^2+q^2)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

6) Второй интеграл умножим и разделим на q^2 :

$$\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \frac{1}{q^2}\int \frac{q^2}{(t^2+q^2)^k}dt .$$

7) Далее в числителе прибавим и отнимем t^2 :

$$\frac{1}{q^2}\int \frac{q^2}{(t^2+q^2)^k}dt = \frac{1}{q^2}\int \frac{(t^2+q^2)-t^2}{(t^2+q^2)^k}dt .$$

8) Полученную дробь представим в виде суммы:

$$\frac{1}{q^2}\int \frac{(t^2+q^2)-t^2}{(t^2+q^2)^k}dt = \frac{1}{q^2}\int \frac{t^2+q^2}{(t^2+q^2)^k}dt - \frac{1}{q^2}\int \frac{t^2}{(t^2+q^2)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{q^2}\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}} - \frac{1}{q^2}\int \frac{t^2}{(t^2+q^2)^k}dt.$$

9) Вторую дробь проинтегрируем по частям

$$\int \frac{t^2}{(t^2+q^2)^k}dt = \int \frac{t\cdot t}{(t^2+q^2)^k}dt = \left[\begin{array}{c} u=t, du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+q^2)^k}, v=\dfrac{(t^2+q^2)^{-k+1}}{2(1-k)} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{t(t^2+q^2)^{-k+1}}{2(1-k)} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}}.$$

10) Просуммируем результаты:

$$\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \frac{1}{q^2}\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}} - \frac{t(t^2+q^2)^{-k+1}}{2(1-k)q^2} + \frac{1}{2(1-k)q^2}\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}}.$$

Т. о. в пунктах 8) и 9) интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k}$ был выражен через интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}}$.

Пример

1) Вычислить $\int \frac{4x^3+8x^2+11x+4}{(x^2+2x+2)^2 x}dx$.

Решение.

Представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{4x^3+8x^2+11x+4}{(x^2+2x+2)^2 x} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{E}{x} .$$

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{E}{x}=\frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)x+E(x^2+2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2x}.$$

В числителе раскроем скобки $\frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)x+E(x^2+2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2x}=$

$$=\frac{Ax^4+2Ax^3+2Ax^2+Bx^3+2Bx^2+2Bx+Cx^2+Dx+Ex^4+4Ex^2+4E+4Ex^3+4Ex}{(x^2+2x+2)^2x}$$

и приведем подобные

$$\frac{Ax^4+2Ax^3+2Ax^2+Bx^3+2Bx^2+2Bx+Cx^2+Dx+Ex^4+4Ex^2+4E+4Ex^3+4Ex}{(x^2+2x+2)^2x}=$$

$$=\frac{x^4(A+E)+x^3(2A+B+4E)+x^2(2A+2B+C+4E)+x(2B+D+4E)+4E}{(x^2+2x+2)^2x}.$$

Приравняем полученные в числителе коэффициенты и коэффициенты исходно числителя:

$$\begin{cases} A+E=0, \\ 2A+B+4E=4, \\ 2A+2B+C+4E=8, \\ 2B+D+4E=11, \\ 4E=4. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим значения коэффициентов $A=-1$, $B=2$, $C=2$, $D=3$, $E=1$. Запишем полученные коэффициенты в числители простейших дробей $\frac{4x^3+8x^2+11x+4}{(x^2+2x+2)^2x}=\frac{-x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{1}{x}$ и рассмотрим сумму интегралов: $\int\frac{-x+2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx+\int\frac{dx}{x}.$ Первый интеграл был рассмотрен в 3°.

$$\int\frac{-x+2}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{-x+2}{(x+1)^2+1}dx=\begin{bmatrix} t=x+1 \\ x=t-1, dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{-t+3}{t^2+1}dt=-\int\frac{t}{t^2+1}dt+3\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2+1}+3\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+3arctg(t)+C=-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+3arctg(x+1)+C.$$

Второй интеграл рассмотрим более подробно. В знаменателе выделим полный квадрат выражения, стоящего в скобках: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ и сделаем замену $t=x+1$.

$$\int\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\left[\begin{array}{c}t=x+1\\x=t-1,dx=dt\end{array}\right]=\int\frac{2t+1}{(t^2+1)^2}dt\,.$$

Разобьем полученный интеграл на сумму интегралов

$\int\frac{2t+1}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt+\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ и рассмотрим каждый из них отдельно.

Интеграл $\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$ вычисляется путем внесения t под знак дифференциала: $\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{dt^2}{(t^2+1)^2}=\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}=\frac{-1}{t^2+1}+C=\frac{-1}{x^2+2x+2}+C.$

В интеграле $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ в числителе прибавим и отнимем t^2:

$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2}dt$. Далее разобьем полученный интеграл на два

$\int\frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{1+t^2}{(t^2+1)^2}dt-\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$, первый из которых табличный

$$\int\frac{1+t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctg(t)+C=arctg(x+1)+C.$$

$$\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{t\cdot t}{(t^2+1)^2}dt=\left[\begin{array}{c}u=t,du=dt\\dv=\frac{tdt}{(t^2+1)^2},v=\frac{-1}{2(t^2+1)}\end{array}\right]=\frac{-t}{2(t^2+1)}+\int\frac{dt}{2(t^2+1)}=$$

$$=\frac{-t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctg(t)+C\,.$$

Таким образом, второй интеграл

$$\int\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\left[\begin{array}{c}t=x+1\\x=t-1,dx=dt\end{array}\right]=\int\frac{2t+1}{(t^2+1)^2}dt=$$

$$=\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt+\int\frac{1+t^2}{(t^2+1)^2}dt-\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt=\frac{-1}{t^2+1}+arctg(t)-\left(\frac{-t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctg(t)\right)+C=$$

$$=\frac{-2+t}{t^2+1}+\frac{1}{2}arctg(t)+C=\frac{x-1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}arctg(x+1)+C.$$

Теперь сведем все результаты воедино:

$$\int\frac{4x^3+8x^2+11x+4}{(x^2+2x+2)^2x}dx=\int\frac{-x+2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx+\int\frac{dx}{x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+3arctg(x+1)+\frac{x-1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}arctg(x+1)+\ln|x|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right|+\frac{7}{2}arctg(x+1)+\frac{x-1}{x^2+2x+2}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить.

1) $\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx$; 2) $\int\frac{2x-3}{(x^2+4x+5)^2}dx$; 3) $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

Ответы.

1) $-\frac{1}{x^2+4x+5}+C$; 2) $-\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{7}{2}arctg(x+2)-\frac{7}{2}\cdot\frac{x+2}{x^2+4x+5}+C$;

3) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+3}+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$.

3.3. Интегрирование тригонометрических функций

Способ вычисления интеграла от выражения, содержащего тригонометрическую функцию, зависит от вида подынтегральной функции.

1° $\int f(\sin x,\cos x)dx$

В этом случае надо при помощи универсальной тригонометрической подстановки выразить $\sin x$ и $\cos x$ через $\mathrm{tg}\left(x/2\right)$: $\sin x=\frac{2tg\left(x/2\right)}{1+tg^2\left(x/2\right)}$, $\cos x=\frac{1-tg^2\left(x/2\right)}{1+tg^2\left(x/2\right)}$

(см. Приложение). Чтобы подынтегральная функция не была слишком громоздкой и неудобной для интегрирования производится следующая замена: $t=$

$\mathrm{tg}\left(x/2\right)$, т.е. x=2arctg t, тогда dx=2·d(arctg t)=2$\frac{1}{1+t^2}dt$. В получившейся в результате интегрирования функции от переменной t надо перейти обратно к $\mathrm{tg}\left(x/2\right)$.

Универсальная тригонометрическая подстановка может использоваться во всех случаях, когда подынтегральная функция содержит $\sin x$ или $\cos x$, но при этом могут получаться сложные подынтегральные выражения, поэтому иногда используют другие приемы (см. 2°, 3°).

Пример

1) Вычислить $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

Делаем замену, описанную выше.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\begin{bmatrix} tg\left(x/2\right)=t, x=2arctgt \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2(1+t^2)dt}{2t(1+t^2)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\left(x/2\right)\right|+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$; 2) $\int\frac{\cos\ x}{\sin\ x+4\sin x\cos x}dx$; 3) $\int\frac{dx}{1-\sin x}$.

Ответы.

1) $-\frac{1}{tg\left(x/2\right)+2}+C$; 2) $\frac{1}{5}\ln\left|tg\left(x/2\right)\right|+\frac{1}{15}\ln\left|3tg^2\left(x/2\right)-5\right|+C$; 3) $-\frac{2}{tg\left(x/2\right)+1}+C$.

2° $\int f(\sin^{2k+1}x,\cos^{2n}x)dx;\ \int f(\sin^{2k}x,\cos^{2n+1}x)dx.$

В интегралах этого вида наиболее удобно внести под знак дифференциала функцию, стоящую в нечетной степени, а оставшуюся подынтегральную функцию привести к той функции, которая теперь стоит под знаком дифференциала.

Если $\int f(\sin^{2k+1}x,\cos^{2n}x)dx$, тогда

$\sin^{2k+1} x dx = \sin^{2k} x \cdot \sin x dx = \sin^{2k} x \cdot (-d\cos x) = -\sin^{2k} x \cdot d\cos x$

и всю подынтегральную функцию надо свести к функции, зависящей только от $\cos x$.

Если же $\int f(\sin^{2k} x, \cos^{2n+1} x)dx$, то $\cos^{2n+1} x dx = \cos^{2n} x \cdot \cos x = \cos^{2n} x \cdot d\sin x$, а в подынтегральной функции все тригонометрические функции выражаются через $\sin x$.

Также интегралы вида $\int f(\sin^{2k+1} x, \cos^{2n} x)dx$ и $\int f(\sin^{2k} x, \cos^{2n+1} x)dx$ можно решать с помощью замены переменной. В этом случае за новую переменную принимается функция, нестоящая в нечетной степени.

В интеграле $\int f(\sin^{2k+1} x, \cos^{2n} x)dx$ в нечетной степени не стоит $\cos x$, значит, делаем замену $t=\cos x$, тогда $x=\arccos t$, $dx=d(\arccos t)=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Напомним, что $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ (см. Приложение), а $\sin^{2k+1} x=\left(\sqrt{1-\cos^2 x}\right)^{2k+1}$.

В интеграле $\int f(\sin^{2k} x, \cos^{2n+1} x)dx$ в нечетной степени не стоит $\sin x$, значит, делаем замену $h=\sin x$, тогда $x=\arcsin h$, $dx=d(\arcsin h)=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}dh$. Напомним, что $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ (см. Приложение), а $\cos^{2n+1} x=\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^{2n+1}$.

<u>Пример</u>

1) Вычислить $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx.$

Решение.

В данном примере $\sin x$ стоит в нечетной степени, поэтому его и вносим под дифференциал: $\sin^3 x=\sin^2 x \cdot \sin x dx=\sin^2 x d(-\cos x)=-\sin^2 x d(\cos x)$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = [\sin x dx = -d\cos x] = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(-d\cos x).$$

Теперь $\sin^2 x$ в числителе выразим через $\cos x$: $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ (см. Приложение).

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(-d\cos x)=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}d\cos x=-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)d\cos x=$$
$$=-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)d\cos x=-\left(\int\cos^{-2}x\,d\cos x-\int d\cos x\right)=-\left(\frac{\cos^{-1}x}{-1}-\cos x\right)+C=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C.$$

Решим этот же пример с помощью замены переменной. В подынтегральной функции в четной степени стоит $\cos x$: $\cos^{-2}x$. Делаем замену $t=\cos x$, $dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\begin{bmatrix} t=\cos x \\ dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{bmatrix}=\int\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=-\int\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{t^2}dt=$$
$$=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=-\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=-\left(\frac{-1}{t}-t\right)+C=\frac{1}{t}+t+C=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C.$$

Как и следовало ожидать, результаты в первом и втором случае получились одинаковыми.

2) Вычислить $\int\cos^3 x\sqrt{\sin x}dx$.

Решение.

Этот интеграл тоже вычислим двумя способами: внесением под знак дифференциала и заменой переменной.

Рассмотрим сначала внесение под знак дифференциала. В подынтегральной функции в нечетной степени стоит $\cos x$, поэтому его вносим под дифференциал: $\cos^3 x dx=\cos^2 x\cdot\cos x dx=\cos^2 x\cdot d\sin x$.

$$\int\cos^3 x\sqrt{\sin x}dx=\int\cos^2 x\sqrt{\sin x}d\sin x.$$

Далее выразим $\cos^2 x$ через $\sin x$: $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ (см. Приложение).

$$\int\cos^2 x\sqrt{\sin x}d\sin x=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sqrt{\sin x}d\sin x=\int\left(\sqrt{\sin x}-\sin^2 x\sqrt{\sin x}\right)d\sin x=$$

$$=\int\left(\sin^{1/2}x-\sin^{5/2}x\right)d\sin x=\frac{\sin^{3/2}x}{\frac{3}{2}}-\frac{\sin^{7/2}x}{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x-\frac{2}{7}\sin^{7/2}x+C.$$

Теперь вычислим этот интеграл с помощью замены переменной. В подынтегральной функции в нечетной степени не стоит $\sin x$: $\sin^{1/2}x$. Делаем замену: $h=\sin x$, $dx=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}dh$.

$$\int\cos^3 x\sqrt{\sin x}dx=\begin{bmatrix} h=\sin x \\ dx=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}dh\end{bmatrix}=\int\left(\sqrt{1-h^2}\right)^3\sqrt{h}\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}dh=\int\left(\sqrt{1-h^2}\right)^2\sqrt{h}dh=$$

$$=\int\left(1-h^2\right)\sqrt{h}dh=\int\left(\sqrt{h}-h^2\sqrt{h}\right)dh=\int\left(h^{1/2}-h^{5/2}\right)dh=\frac{h^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{h^{7/2}}{\frac{7}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{3}h^{3/2}-\frac{2}{7}h^{7/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x-\frac{2}{7}\sin^{7/2}x+C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Вычислить.

1) $\int\sin x\cos^2 xdx$; 2) $\int\cos^3 xdx$; 3) $\int\sin^4 x\cos^5 xdx$; 4) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}dx$;

5) $\int\cos^3 x\sin^6 xdx$; 6) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}dx$; 7) $\int\frac{\cos x}{\cos 2x}dx$.

Ответы.

1) $-\frac{\cos^3 x}{3}+C$; 2) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$; 3) $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}+C$;

4) $3\cos^{-1/3}x+\frac{3}{5}\cos^{5/3}x+C$; 5) $\frac{1}{16}\sin x-\frac{1}{48}\sin 3x+C$;

6) $\frac{-1}{5\sin^5 x}+\frac{2}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}+C$; 7) $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}\right|+C$.

3° $\int f(\sin^{2k}x,\cos^{2n}x)dx$, *k>0, n>0.*

Для того, чтобы упростить интегралы данного вида применяют формулы понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Таким образом, все подынтегральное выражение сводится к функции от $\cos(2x)$ и дифференциалу $d(\cos 2x)$.

Пример

1) Вычислить $\int \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int \cos^4 x dx$; 2) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 3) $\int \sin^6 x dx$; 4) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$; 5) $\int \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

Ответы.

1) $\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 2) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

3) $\frac{13}{8}x + \frac{5}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$; 4) $\frac{3}{128}x - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{2048} + C$;

5) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}\sin 2x + C$.

4° $\int f(\sin^{2k} x, \cos^{2n} x) dx$, $k \cdot n < 0$.

Если в интегралах данного вида прибегнуть к предыдущему методу решения, то подынтегральная функция усложнится. Здесь целесообразнее использовать следующее преобразование: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ или $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ (см. Приложение). Таким образом, вся подынтегральная функция становится функцией от tg

x или от ctg x. Далее, чтобы упростить вид интегрируемого выражения, делаем замену для tg x:

p=tg x, тогда x=arctg p и $dx=d$(arctg p)=$\dfrac{1}{1+p^2}\,dp$. Либо для ctg x: q=ctg x, тогда x=arcctg q и $dx=d$(arcctg q)=$-\dfrac{1}{1+q^2}\,dq$.. В результате интегрирования получаем функцию, зависящую от p или q, и возвращаемся к изначальной переменной x: p=tg x или q=ctg x.

<u>Пример</u>

1) Вычислить $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int tg^2 x\cdot(1+tg^2 x)dx = \begin{bmatrix} p = tgx, x = arctgp \\ dx = \dfrac{dp}{1+p^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int p^2(p^2+1)\frac{dp}{1+p^2} = \int p^2 dp = \frac{p^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Вычислить.

1) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$; 2) $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^2 x}dx$; 3) $\int \frac{\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)^2}dx$.

Ответы.

1) $\frac{tg^5 x}{5}+C$; 2) $-\frac{1}{4}\ln\left|1+4\cos^2 x\right|+C$; 3) $\frac{tg^3 x}{3}+C$.

Приложение

Таблица интегралов

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$; $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$; $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$;

$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$; $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$; $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm A}\right| + C$; $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$;

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Тригонометрические формулы

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$; $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha+\beta))$; $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$;

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$; $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1 + tg^2(x/2)}$; $\cos x = \frac{1 - tg^2(x/2)}{1 + tg^2(x/2)}$; $tgx = \frac{2tg(x/2)}{1 - tg^2(x/2)}$.

Учебное издание

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ
Методические указания

Составитель: Е.П. Ростова

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева
443086 Самара, Московское шоссе, 34