ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

О.А. ВАСИЛЬЕВА, С.А. МИХАЛКИНА

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Методические указания

С А М А Р А 2 0 0 6

УДК 512.623 (075)

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. *Ю.В. Гуменникова*

Васильева, О.А. **Применение функций нескольких переменных в теории поля**: метод. указания / ***О.А. Васильева, С.А. Михалкина;*** Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2006.– 25 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по теории скалярных и векторных полей, а также образцы решения задач по теме «Применение функций нескольких переменных в теории поля». Предлагаются индивидуальные задания для выполнения типовых расчетов.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета.

Методические указания выполнены на кафедре высшей математики в рамках инновационной образовательной программы «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С.П.Королева.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Скалярное поле и его характеристики

1.1. Геометрические характеристики

Пространство (или часть его *V*), в каждой точке которого определена скалярная величина, называется **скалярным полем**.

Таким образом, скалярное поле определяется числовой функцией $u = u(x, y, z)$, заданной в некоторой области *V* пространства. В этом случае будем говорить, что задано поле u. Примерами скалярных полей являются поле температур тела, поле давлений в некотором объеме и др.

Если скалярное поле задано функцией двух переменных $u = u(x, y)$, оно называется **плоским**.

Графически скалярное поле изображается с помощью **поверхностей уровня**, в каждой точке которых значение поля постоянно, т.е. поверхность уровня скалярного поля u определяется равенством $u(x, y, z) = C$. Примером поверхностей уровня могут служить эквипотенциальные поверхности в электростатическом поле.

Если поле плоское, то равенство вида $u(x, y) = C$ определяет **линию уровня поля.** Примерами линий уровня являются изобары (линии одинакового давления), линии одинаковой высоты на топографических картах и т.п.

1.2. Оператор Гамильтона

Символический вектор $\overline{\nabla}$ «набла» с координатами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ вида

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$$

называется **оператором Гамильтона**. Его действие на скалярную функцию u определяется по правилу

$$\overline{\nabla} u = \left(\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \overline{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}.$$

1.3. Производная по направлению

Пусть задано скалярное поле $u = u(x, y, z)$. Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ и луч l, выходящий из точки M в направлении единичного вектора

$$\overline{l_0} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k}$$

и пусть $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ другая точка этого луча.

Производной скалярного поля $u(M)$ по направлению l называется соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta \overline{l} \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta \overline{l}} = \lim_{M_1 \to M} \frac{u(M_1) - u(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|},$$

где $\Delta \overline{l} = \left|\overline{MM_1}\right|$.

Производную по направлению можно вычислить по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{1}$$

где $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ – частные производные функции $u = u(x, y, z)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы направления l. Таким образом, единичный вектор заданного направления равен $\overline{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Производная поля в данной точке M_0 по направлению l характеризует скорость изменения поля в данном направлении l.

Если $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} > 0$, то поле $u = u(x, y, z)$ возрастает в данном направлении, если $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} < 0$, то поле $u = u(x, y, z)$ убывает в данном направлении.

1.4. Градиент и его свойства

Градиентом скалярного поля $u(M)$ называется вектор

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}. \tag{2}$$

Свойства градиента

1. Если $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ дифференцируемые функции, C – постоянная, то справедливы следующие соотношения:

   1.1. $\mathbf{grad}(u \pm v) = \mathbf{grad}\, u \pm \mathbf{grad}\, v;$

   1.2. $\mathbf{grad}\,(C + u) = \mathbf{grad}\, u;$

   1.3. $\mathbf{grad}\,(Cu) = C\,\mathbf{grad}\, u;$

   1.4. $\mathbf{grad}(uv) = v\,\mathbf{grad}\, u + u\,\mathbf{grad}\, v;$

   1.5. $\mathbf{grad}(u^n) = n u^{n-1}\mathbf{grad}\, u;$

   1.6. $\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\mathbf{grad}\, u - u\,\mathbf{grad}\, v}{v^2}; v \neq 0.$

2. Градиент скалярного поля $u = u(M_0)$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через эту точку. Таким образом, вектор $\mathbf{grad}\, u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля u в сторону наибольшего возрастания этого поля.

3. Градиент скалярного поля $u = u(M_0)$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направлен в сторону наибыстрейшего возрастания поля в этой точке, а модуль градиента численно равен скорости наибыстрейшего возрастания функции в этой точке.

4. Градиент скалярного поля u можно представить как действие оператора Гамильтона на скалярную функцию по правилу

$$\overline{\nabla} u = \left(\overline{i}\, \frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\, \frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \overline{i}\, \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{j}\, \frac{\partial u}{\partial y} + \overline{k}\, \frac{\partial u}{\partial z} = \mathbf{grad}\, u\,,$$

   т.е. $\mathbf{grad}\, u = \overline{\nabla} u$.

5. Связь между градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ и производной скалярного поля по направлению l выражается формулой: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{grad}\, u \cdot \overline{l}_0$.

6. Производная поля u в данном направлении l равна проекции градиента на направление дифференцирования: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \overline{\nabla} u \cdot \overline{l}_0$.

Из выше указанных свойств градиента следует, что $\mathbf{grad}\,u$ скалярного поля $u = u(x,\, y,\, z)$ определяется самим полем и не зависит от системы координат.

2. Векторное поле и его характеристики

2.1. Геометрические характеристики

Если каждой точке $M(x,\, y,\, z)$ из области V поставлен в соответствие вектор $\overline{F} = \overline{F}(M)$, то говорят, что в некоторой области V задано векторное поле. Векторное поле может быть представлено в виде

$$\overline{F}(M) = P(x,\, y,\, z)\,\overline{i} + Q(x,\, y,\, z)\,\overline{j} + R(x,\, y,\, z)\,\overline{k}\,,$$

где $P(x,\, y,\, z)$, $Q(x,\, y,\, z)$, $R(x,\, y,\, z)$ – скалярные функции.

Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле электрической напряженности и др.

Одной из важных характеристик векторного поля является векторная (силовая) линия поля. **Векторной линией** поля $\overline{F}$ называется кривая, в каждой точке M которой касательная совпадает с направлением поля $\overline{F}$.

Примерами векторных линий могут служить линии тока жидкости, силовые линии магнитного поля и др.

Векторные линии поля $\overline{F} = (P,\, Q,\, R)$ можно найти из системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$.

Пространственные области, целиком составленные из векторных линий, называются **векторными трубками.**

2.2. Дивергенция и ее свойства

Скалярной характеристикой векторного поля является **дивергенция,** которая вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

С точки зрения гидродинамики: если $\overline{F}$ – поле скоростей текущей жидкости, то числовое значение дивергенции векторного поля $\overline{F}$ в данной точке M

характеризует **интенсивность** источников или стоков в этой точке. Если $\operatorname{div}\overline{F}(M) > 0$, то в точке M – источник, если $\operatorname{div}\overline{F}(M) < 0$, то в точке M – сток. Если $\operatorname{div}\overline{F}(M) = 0$, в точке M нет ни источников, ни стоков.

Свойства дивергенции

1. $\operatorname{div}(\overline{F} + \overline{G}) = \operatorname{div}\overline{F} + \operatorname{div}\overline{G}$;
2. $\operatorname{div}(\overline{C}) = 0$, где $\overline{C}$ – постоянный вектор;
3. $\operatorname{div}(u\overline{F}) = u\operatorname{div}\overline{F} + \overline{F}\cdot\mathbf{grad}\,u$, где $u = u(x, y, z)$ – скалярная функция;
4. $\operatorname{div}(u\overline{C}) = \overline{C}\,\mathbf{grad}\,u$, где $\overline{C}$ – постоянный вектор;
5. Дивергенцию векторного поля $\overline{F}$ можно представить как скалярное произведение оператора Гамильтона и векторной функции $\overline{F}$: $\operatorname{div}\overline{F} = \overline{\nabla}\cdot\overline{F}$.

2.3. Соленоидальное поле

Векторное поле $\overline{F}$ называется **соленоидальным,** если дивергенция этого поля тождественно равна нулю во всех точках некоторой области V:

$$\operatorname{div}\overline{F}(M) \equiv 0, \quad \forall M \in V.$$

Примером соленоидального поля может служить поле скоростей несжимаемой жидкости, при отсутствии стоков и источников; магнитное поле, генерированное катушкой – соленоидом.

2.4. Ротор и его свойства

Ротором (вихрем) векторного поля

$\overline{F}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ называется вектор

$$\mathbf{rot}\,\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Ротор векторного поля вектор $\overline{F}(M)$ удобно записывать в виде символического определителя

$$\mathbf{rot}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Главным свойством ротора является то, что $\mathbf{rot}\,\overline{F}$ не зависит от системы координат, а определяется исходным векторным полем.

Отличный от нуля вектор $\mathbf{rot}\,\overline{F}$ свидетельствует о вращении векторного поля $\overline{F}$.

Свойства ротора

1. $\mathbf{rot}(\overline{F}+\overline{G}) = \mathbf{rot}\,\overline{F} + \mathbf{rot}\,\overline{G}$;
2. $\mathbf{rot}\,\overline{C} = 0$, где $\overline{C}$ – постоянный вектор;
3. $\mathbf{rot}(u\overline{F}) = u\,\mathbf{rot}\,\overline{F} + \mathbf{grad}\,u \times \overline{F}$, где $u = u(x, y, z)$ - скалярная функция;
4. Ротор векторного поля равен векторному произведению вектора «набла» $\overline{\nabla}$ на вектор $\overline{F}$: $\mathbf{rot}\,\overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F}$.

2.5. Потенциальное поле

Векторное поле $\overline{F}$ называется **потенциальным,** если ротор этого поля тождественно равен нулю во всех точках некоторой области V:

$$\mathbf{rot}\ \overline{F}(M) \equiv 0, \quad \forall M \in V.$$

В качестве примеров потенциальных полей можно привести следующие поля: поле притяжений к центру, электрическое поле напряженностей точечного заряда.

Отметим следующий важный факт. Работа векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

2.6. Действия с вектором $\overline{\nabla}$

Пусть $u = u(x, y, z)$ – скалярное поле, а $\overline{F} = (P, Q, R)$ – векторное поле. Напомним, что символический вектор «набла» имеет следующие координаты $\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Его действие на скалярные и векторные поля определяется следующим образом:

$\operatorname{div} \overline{F} = \overline{\nabla} \cdot \overline{F}$ – скалярная величина;

$\mathbf{rot}\, \overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F}$ – вектор;

$\mathbf{grad}\, u = \overline{\nabla} u$ – вектор.

Оператор $\overline{\nabla}$ не является вектором в классическом понимании этого слова. Наряду с векторной природой «набла» имеет и дифференциальную природу. Если оператор $\overline{\nabla}$ действует на произведение, необходимо применять его к каждому сомножителю отдельно, считая другой сомножитель постоянным. Затем, пользуясь правилами векторной алгебры, следует преобразовать каждое слагаемое так, чтобы оператор $\overline{\nabla}$ стоял перед последним сомножителем.

Условимся каждый раз отмечать в формулах знаком «$\downarrow$» тот сомножитель, к которому оператор $\overline{\nabla}$ должен применяться. Для иллюстрации соответствующих правил действия рассмотрим некоторые примеры.

1. $\overline{\nabla}(uv) = \overline{\nabla} \overset{\downarrow}{u} v + \overline{\nabla} u \overset{\downarrow}{v} = v \overline{\nabla} u + u \overline{\nabla} v$, т.е. в обычных обозначениях $\mathbf{grad}(uv) = v\, \mathbf{grad}\, u + u\, \mathbf{grad}\, v$;

2. $\operatorname{div}\left(u \overline{F}\right) = \overline{\nabla} \cdot u \overline{F} = \overline{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{u} \overline{F} + \overline{\nabla} \cdot u \overset{\downarrow}{\overline{F}} = \overline{\nabla} u \cdot \overline{F} + u(\overline{\nabla} \cdot \overline{F})$.

Множители на которые $\overline{\nabla}$ не действует, можно «высвободить» из-под оператора $\overline{\nabla}$, т.е. в обычных обозначениях $\operatorname{div}(u \overline{F}) = \overline{F} \cdot \mathbf{grad}\, u + u \operatorname{div} \overline{F}$;

3. $\mathbf{rot}(u\overline{F}) = \overline{\nabla} \times u\overline{F} = \overline{\nabla} \times \overset{\downarrow}{u} \overline{F} = \overline{\nabla} \times u \overset{\downarrow}{\overline{F}} = \overline{\nabla} u \times \overline{F} + u(\overline{\nabla} \times \overline{F})$, т.е. в обычных обозначениях $\mathbf{rot}(u\overline{F}) = \mathbf{grad}\, u \times \overline{F} + u\, \mathbf{rot}\, \overline{F}$.

2.7. Дифференциальные операции второго порядка

В предыдущих пунктах были введены понятия градиента, дивергенции и ротора. В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с выполнением этих основных операций, но и с различными их комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые операции второго порядка, т.е. попарные комбинации трех указанных выше основных операций.

Предполагаем, что функции u, P, Q, R достаточное число раз непрерывно дифференцируемы. К дифференциальным операциям второго порядка относятся следующие: $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,u$, $\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\,u$, $\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{F}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,\overline{F}$, $\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\,\overline{F}$.

С помощью оператора «набла» их можно записать следующим образом:

1. $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,u = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} u$;
2. $\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\,u = \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} u$;
3. $\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{F} = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{F})$;
4. $\mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,\overline{F} = \overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{F})$;
5. $\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\,\overline{F} = \overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{F})$.

2.8. Оператор Лапласа

Оператором Лапласа Δ называется оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применив его к скалярной функции u, получим

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа Δ символически можно получить как скалярный квадрат оператора $\overline{\nabla}$:

$$\overline{\nabla}^2 = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Получим явные выражения некоторых дифференциальных операций второго порядка:

$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\,u=\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u\,.$$

Итак, $\operatorname{div}\mathbf{grad}\,u=\Delta u$.

Можно показать, что $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\overline{F}\equiv 0$, а $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\overline{F}=\mathbf{grad}\operatorname{div}\overline{F}-\Delta\overline{F}$.

Уравнение $\Delta u=0$ называется **уравнением Лапласа**. Оно используется при описании различных установившихся процессов, например установившегося движения несжимаемой жидкости и др. Скалярное поле $u=u(x,\,y,\,z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u=0$, называется **гармоническим**.

3. Краткая справка характеристик скалярных и векторных полей

<table>
<tr><td colspan="4">Скалярное поле
$u = u(x,\ y,\ z)$</td><td colspan="4">Векторное поле
$\overline{F} = P(x,\ y,\ z)\overline{i} + Q(x,\ y,\ z)\overline{j} + R(x,\ y,\ z)\overline{k}$</td></tr>
<tr><td colspan="8">Геометрические характеристики</td></tr>
<tr><td colspan="4">Поверхности уровня – множества точек пространства, на которых значение поля постоянно, т.е. $u(x,\ y,\ z) = const$.</td><td colspan="4">Векторные линии – кривые, в каждой точке которых вектор $\overline{F}$ направлен по касательной к этой кривой.</td></tr>
<tr><td colspan="8">Аналитические скалярные характеристики</td></tr>
<tr><td colspan="4">Производная по направлению – характеризует скорость изменения поля в данном направлении.</td><td colspan="4">Дивергенция – характеризует объемную плотность потока вектора.</td></tr>
<tr><td colspan="8">Формула для вычислений</td></tr>
<tr><td colspan="4">$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$ где $\overline{l}_0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ – орт вектора направления $\overline{l}$.</td><td colspan="4">$$\mathrm{div}\,\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$</td></tr>
<tr><td colspan="8">Применение</td></tr>
<tr><td>$\frac{\partial u}{\partial l}$</td><td>$>0$</td><td>$<0$</td><td>$=0$</td><td>$\mathrm{div}\,\overline{F}(M)$</td><td>$>0$</td><td>$<0$</td><td>$=0$</td></tr>
<tr><td>поле u в точке M</td><td>возрастает в направлении $\overline{l}$</td><td>убывает в направлении $\overline{l}$</td><td>стационарно</td><td>в точке M</td><td>источник</td><td>сток</td><td>нет ни источника ни стока</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4">Если во всех точках поля $\mathrm{div}\,\overline{F} \equiv 0$, то поле соленоидальное.</td></tr>
<tr><td colspan="8">Аналитические векторные характеристики</td></tr>
<tr><td colspan="4">Градиент – вектор, который указывает направление наибыстрейшего возрастания поля в точке, и расположенный перпендикулярно поверхности уровня, проходящей через эту точку.</td><td colspan="4">Ротор – характеризует плотность вихрей.</td></tr>
<tr><td colspan="8">Формула для вычислений</td></tr>
<tr><td colspan="4">$$\mathbf{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$$</td><td colspan="4">$$\mathbf{rot}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="8">Применение</td></tr>
<tr><td colspan="4">1) $\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{grad}\,u \cdot \overline{l}_0$;
2) Поверхность $S : G(x, y, z) = 0$, то нормаль $\overline{n}$ к поверхности S $\overline{n} = \pm\mathbf{grad}\,G$.</td><td colspan="4">Если во всех точках поля $\mathbf{rot}\,\overline{F} \equiv 0$, то поле потенциальное.</td></tr>
</table>

4. Примеры решения задач

Задача № 1.

Найдите производную скалярного поля $u = x^2\sqrt{y} + \sqrt{4-2z^2}$ точке $M_0(2, 1, 0)$ по направлению к точке $M_1(4, 2, 2)$. Определите характер изменения поля в точке M_0.

Решение.

Воспользуемся формулой вычисления производной по направлению:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma . \qquad (4)$$

Частные производные и их значения в точке M_0 соответственно равны:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sqrt{y}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2z}{\sqrt{4-2z^2}}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 0.$$

Направляющие косинусы направления $\overline{l} = \overline{M_0M_1}$ находим как координаты единичного вектора $\overline{l_0}$. Для этого вычислим координаты вектора $\overline{M_0M_1}$:

$\overline{M_0M_1} =(2; 1; 2)$ и его длину $\left|\overline{M_0M_1}\right| = \left|\overline{l}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Единичный вектор направления $\overline{l}$ равен $\overline{l_0} = \dfrac{\overline{M_0M_1}}{\left|\overline{M_0M_1}\right|}$ и, следовательно,

$\overline{l_0} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Направляющие косинусы этого направления равны

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}; \ \cos\beta = \frac{1}{3}; \ \cos\gamma = \frac{2}{3}. \qquad (6)$$

Подставим найденные значения из (5) и (6) в формулу (4):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 4\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3} > 0.$$

Так как $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} > 0$, то в данном направлении скалярное поле $u(x,\, y,\, z)$ является возрастающим.

Задача № 2.

Найдите скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = 3\sqrt{xy} + \sqrt{9-2z^2}$ в точке $M_0(1,\, 1,\, 0)$.

Решение.

Поскольку направление наибыстрейшего возрастания задаётся направлением градиента, а скорость его численно равна модулю градиента, то используем формулу (2):

$$\mathbf{grad}\, u(M_0) = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \right)$$

или

$$\mathbf{grad}\, u(M_0) = \overline{\nabla} u\,(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \overline{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \overline{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \overline{k}\,. \tag{7}$$

Вычислим частные производные скалярного поля $u(x,\, y,\, z)$ и найдём их значения в точке M_0:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}; && \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \frac{3}{2};\\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}; && \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \frac{3}{2};\\ &\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2z}{\sqrt{9-2z^2}}; && \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставим значения производных из формул (8) в формулу (7), тогда

$$\mathbf{grad}\, u(M_0) = \frac{3}{2}\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j}\,.$$

Из свойств градиента наибольшая скорость возрастания поля в точке M_0 равна

$$v_{\max}\Big|_{M_0} = \left|\mathbf{grad}\, u(M_0)\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+0} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$, а

направление наибыстрейшего возрастания поля определяется единичным вектором градиента скалярного поля в точке M_0:

$$\overline{n}_{\mathbf{grad}\, u(M_0)} = \frac{\mathbf{grad}\, u(M_0)}{|\mathbf{grad}\, u(M_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}\,.$$

Задача № 3.

Найдите угол между нормалями к поверхностям уровня полей $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $v = \ln(x^2+y^2+z^2)$ в точке $M_0(0, 0, 1)$, если нормали направлены в сторону возрастания функций этих полей.

Решение.

Поскольку нормали, описанные в условии задачи, соответствуют градиентам указанных скалярных полей, найдём $\mathbf{grad}\, u(M_0)$ и $\mathbf{grad}\, v(M_0)$.

Вычислим частные производные и их значения в точке M_0.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 1,$$

Получим исходя из формулы (2): $\mathbf{grad}\, u(M_0) = (0, 0, 1) = \overline{k}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}; \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}; \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}; \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{M_0} = 2$$

и из формулы (2) запишем $\mathbf{grad}\, v(M_0) = \left(0,\, 0,\, 2\right) = 2\overline{k}$.

Если φ – угол между градиентами, то воспользовавшись формулой

$$\cos\varphi = \frac{\left(\mathbf{grad}\, u(M_0), \mathbf{grad}\, v(M_0)\right)}{\left|\mathbf{grad}\, u(M_0)\right| \cdot \left|\mathbf{grad}\, v(M_0)\right|},$$

получим $\cos\varphi = \dfrac{0+0+2}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}} = 1$.

Следовательно, $\varphi = 0^\circ$.

Задача № 4.

Найдите $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\, u\left(M_0\right)$ и $\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\, u\left(M_0\right)$, если $u = x^2 y + \sqrt{4-2z^2}$; $M_0\left(2, 1, 0\right)$. (см. задачу № 1).

Решение.

Напомним, что (см. решение задачи № 1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sqrt{y}\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2z}{\sqrt{4-2z^2}}\,;$$

$$\mathbf{grad}\, u = 2x\sqrt{y}\cdot\overline{i} + \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\cdot\overline{j} - \frac{2z}{\sqrt{4-2z^2}}\cdot\overline{k}\ .$$

Для векторного поля $\overline{a} = P\left(x,\, y,\, z\right)\overline{i} + Q\left(x,\, y,\, z\right)\overline{j} + R\left(x,\, y,\, z\right)\overline{k}$ дивергенция равна $\mathrm{div}\,\overline{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Для вектора $\mathbf{grad}\, u$ имеем $P = 2x\sqrt{y}$; $\quad Q = \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}$; $\quad R = -\dfrac{2z}{\sqrt{4-2z^2}}$.

Тогда $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2\sqrt{y}$; $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{4\sqrt{y^3}}$; $\quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = -\dfrac{8z}{\sqrt{(4-2z^2)^3}}$;

и $\mathrm{d\,iv}\,\mathbf{grad}\, u = 2\sqrt{y} - \dfrac{x^2}{4\sqrt{y^3}} - \dfrac{8}{\sqrt{(4-2z^2)^3}}$.

Подставим значения координат точки M_0 в последнюю формулу и получим, что в точке M_0 $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\, u\left(M_0\right) = 0$.

Ротор векторного поля $\overline{a}$ вычисляется с помощью символического определителя $\quad \mathbf{rot}\ \overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

Подставим $P = 2x\sqrt{y}$; $\quad Q = \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}$; $\quad R = -\dfrac{2z}{\sqrt{4-2z^2}}$ в определитель, получим

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\, u = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x\sqrt{y} & \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}} & -\dfrac{2z}{\sqrt{4-2z^2}} \end{vmatrix} = 0\cdot\overline{i} - 0\cdot\overline{j} + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y}}\right)\cdot\overline{k} = \overline{0}.$$

Итак, $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\, u(M_0) = 0$, $\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\, u(M_0) = \overline{0}$.

5. Индивидуальные задания

Задача № 1.

Найдите производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению к точке M_1. Определите характер изменения поля в точке M_0.

1) $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$; $\quad M_0(3, 0, -4)$; $\quad M_1(2, -1, -3)$;

2) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$; $\quad M_0(0, -3, 4)$; $\quad M_1(-1, -2, 3)$;

3) $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$; $\quad M_0(1, 1, 0)$; $\quad M_1(2, -1, -1)$;

4) $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$; $\quad M_0(1, 1, -2)$; $\quad M_1(-2, 0, -1)$;

5) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $\quad M_0(3, 4, 1)$; $\quad M_1(1, 6, 2)$;

6) $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $\quad M_0(1, -2, 4)$; $\quad M_1(2, -3, 2)$;

7) $u = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + xz$; $\quad M_0(2, 2, -1)$; $\quad M_1(4, -1, -2)$;

8) $u = 2\ln(2 + x^2) - 4xyz$; $\quad M_0(0, 1, 2)$; $\quad M_1(1, 2, 4)$;

9) $u = x\sqrt{y} - yz^2$; $M_0(2, 1, -1)$; $M_1(0, 1, 2)$;

10) $u = xz^2 - x\sqrt{xy}$; $M_0(1, 4, 1)$; $M_1(0, 5, -1)$;

11) $u = x^2 y - \sqrt{x^2 + 2z^2}$; $M_0(2, 2, 3)$; $M_1(2, 0, 5)$;

12) $u = 2\ln(x^2 + 1) - 4xyz^2$; $M_0(3, 2, 1)$; $M_1(2, 0, 3)$;

13) $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$; $M_0(2, 4, 4)$; $M_1(4, 4, 2)$;

14) $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$; $M_0(1, 1, 2)$; $M_1(0, 2, 1)$;

15) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 4xz$; $M_0(0, 1, 1)$; $M_1(1, -1, 2)$;

16) $u = x + \ln(y^2 + z^2)$; $M_0(2, 1, 1)$; $M_1(4, 0, 2)$;

17) $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$; $M_0(1, 5, -2)$; $M_1(1, 3, 0)$;

18) $u = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z$; $M_0(0, 1, 1)$; $M_1(-2, 4, 3)$;

19) $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$; $M_0(-2, 1, -1)$; $M_1(10, -3, -9)$;

20) $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$; $M_0(1, 3, 2)$; $M_1(2, 1, 4)$;

21) $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$; $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$; $M_1\left(\frac{\pi}{2} - 4, \frac{3\pi}{2} - 3, 3\right)$;

22) $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$; $M_0(1, 1, 2)$; $M_1(-4, 7, 2 - 2\sqrt{5})$;

23) $u = x^2 + \sqrt{y^2 + z^2}$; $M_0(1, -3, 4)$; $M_1(1, -4, 5)$;

24) $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x + \sqrt{y}}$; $M_0(4, 1, -2)$; $M_1(6, 1, -1)$;

25) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$; $M_0(1, 1, 0)$; $M_1(3, -1, 1)$;

26) $u = 2\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} z$; $M_0(3, -2, 1)$; $M_1(-1, -2, 4)$;

27) $u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y)$; $M_0(1, 2, -1)$; $M_1(0, 0, 1)$;

28) $u = \ln(y^2 + x^2) + xyz$; $M_0(1, -1, 2)$; $M_1(0, 0, -3)$;

29) $u = xy - \dfrac{x}{z}$; $M_0(-4, 3, -1)$; $M_1(-9, 2, 0)$;

30) $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$; $M_0(1, -3, 4)$; $M_1(3, -2, 3)$;

31) $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$; $M_0(2, 1, 1)$; $M_1(2, -2, 5)$.

Задача № 2.

Найдите скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = u(x, y, z)$ в точке M_0.

1) $u = 4\ln(3+x^2) - 8xyz$; $M_0(1, 1, 1)$;

2) $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$; $M_0(2, 4, 4)$;

3) $u = -2\ln(x^2-5) - 4xyz$; $M_0(1, 1, 1)$;

4) $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2+5z^2}$; $M_0\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$;

5) $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$; $M_0(2, 2, 4)$;

6) $u = x\sqrt{y} - yz^2$; $M_0(2, 1, -1)$;

7) $u = 7\ln(x^2 + \frac{1}{13}) - 4xyz$; $M_0(1, 1, 1)$;

8) $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + xz$; $M_0(2, 2, -1)$;

9) $u = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}$; $M_0(1, -2, 4)$;

10) $u = \sqrt{x^2+y^2} - z$; $M_0(3, 4, 1)$;

11) $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$; $M_0(1, 1, -2)$;

12) $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4-z^2}$; $M_0(1, 1, 0)$;

13) $u = \frac{x}{y+3} + y\sqrt{z}$; $M_0(1, -2, 1)$;

14) $u = \ln(1+x^2+y^2) - \sqrt{x^2+z^2}$; $M_0(3, 0, -4)$;

15) $u = x^2y - \sqrt{xy+z^2}$; $M_0(1, 0, -2)$;

16) $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$; $M_0(-2, 1, 0)$;

17) $u = \ln(x+2y) + \sqrt{xz}$; $M_0(1, 0, 1)$;

18) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$; $M_0(1, 4, 0)$;

19) $u = \ln(y^2 + x^2) + xyz$; $M_0(1, -1, 2)$;

20) $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$; $M_0(2, 1, 1)$;

21) $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$; $M_0(1, 0, 4)$;

22) $u = \ln(2x^2 + y) + \sqrt{yz}$; $M_0(0, 1, 1)$;

23) $u = x^2 y^2 z - \ln(z + x)$; $M_0(0, 2, 3)$;

24) $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$; $M_0(1, 2, -1)$;

25) $u = yz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $M_0(0, 1, 0)$;

26) $u = y \ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z$; $M_0(0, 1, 2)$;

27) $u = x^2 \ln y + \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}$; $M_0(1, 1, 1)$;

28) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - 2z^2}$; $M_0(1, 1, 0)$;

29) $u = 2\sqrt{3x + y} + \operatorname{arctg} z$; $M_0(1, 1, 0)$;

30) $u = x^3 y^2 - \sqrt{x^2 + z^2}$; $M_0(1, 1, 0)$;

31) $u = \dfrac{x}{y + 3z} - x^2 z^2$; $M_0(-1, 1, 0)$.

Задача №3.

Найдите угол между нормалями к поверхностям уровня полей $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ в точке M, если нормали направлены в сторону возрастания функций этих полей.

1) $v = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$; $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$; $M\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

2) $v = \dfrac{4\sqrt{6}}{x} - \dfrac{\sqrt{6}}{9y} + \dfrac{3}{z}$; $u = x^2 yz^3$; $M\left(2, \dfrac{1}{3}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

3) $v = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$; $u = \dfrac{z^3}{xy^2}$; $M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

4) $v = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{z\sqrt{6}}$; $u = \dfrac{z}{x^3 y^2}$; $M\left(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

5) $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$; $\quad u=\dfrac{x^2}{yz^2}$; $\quad M\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $v=3\sqrt{2}x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$; $\quad u=\dfrac{z^2}{xy^2}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

7) $v=6\sqrt{6}x^3+6\sqrt{6}y^3+2z^3$; $\quad u=\dfrac{xz^2}{y}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$;

8) $v=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z}$; $\quad u=\dfrac{yz^2}{x}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

9) $v=3\sqrt{2}x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$; $\quad u=\dfrac{xy^2}{z^2}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

10) $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z\sqrt{6}}$; $\quad u=\dfrac{x^3y^2}{z}$; $\quad M\left(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

11) $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z}$; $\quad u=\dfrac{1}{x^2yz}$; $\quad M\left(2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

12) $v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$; $\quad u=\dfrac{x^2}{y^2z^3}$; $\quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

13) $v=x^2+9y^2+6z^2$; $\quad u=xyz$; $\quad M\left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

14) $v=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2y}-\dfrac{\sqrt{6}}{4z}$; $\quad u=\dfrac{y^3}{x^2z}$; $\quad M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$;

15) $v=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$; $\quad u=xy^2z$; $\quad M\left(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

16) $v=-\dfrac{\sqrt{6}}{2x}+\dfrac{\sqrt{6}}{2y}-\dfrac{2}{3z}$; $\quad u=\dfrac{x}{z^2y}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

17) $v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$; $\quad u=\dfrac{y^2z^3}{x^2}$; $\quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

18) $v=\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$; $\quad u=\dfrac{y^2z^3}{x}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

19) $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$; $\quad u=\dfrac{y}{xz^2}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$;

20) $v = x^2 - y^2 - 3z^2$; $\quad u = \dfrac{yz^2}{x}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

21) $v = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2$; $\quad u = \dfrac{z^2}{x^2 y^2}$; $\quad M\left(\dfrac{2}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

22) $v = \dfrac{x^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{8z^3}{\sqrt{3}}$; $\quad u = \dfrac{x^2}{y^2 z^3}$; $\quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

23) $v = \dfrac{3x^2}{2} + 3y^2 - 2z^2$; $\quad u = x^2 y z^3$; $\quad M\left(2, \dfrac{1}{3}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

24) $v = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$; $\quad u = \dfrac{xy^2}{z^3}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

25) $v = \sqrt{2}x^2 - \dfrac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$; $\quad u = \dfrac{1}{xy^2 z}$; $\quad M\left(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

26) $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$; $\quad u = \dfrac{1}{xyz}$; $\quad M\left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

27) $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}x} - \dfrac{2\sqrt{2}}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$; $\quad u = \dfrac{x}{y^2 z^3}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

28) $v = -\dfrac{4\sqrt{2}}{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{9y} + \dfrac{1}{\sqrt{3}z}$; $\quad u = x^2 yz$; $\quad M\left(2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

29) $v = \dfrac{x^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{8z^3}{\sqrt{3}}$; $\quad u = \dfrac{y^2 z^3}{x^2}$; $\quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

30) $v = -\dfrac{3x^3}{\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3$; $\quad u = \dfrac{x^2 z}{y^3}$; $\quad M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$;

31) $v = x^2 - y^2 - 3z^2$; $\quad u = \dfrac{x}{yz^2}$; $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача № 4.

Найдите $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, u)$ и $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\, u)$, где u – функция скалярного поля из задачи № 1.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч. IV. – Мн.: Высш. шк., 1987. – 240 с.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 240 с.